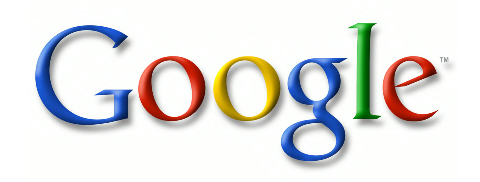
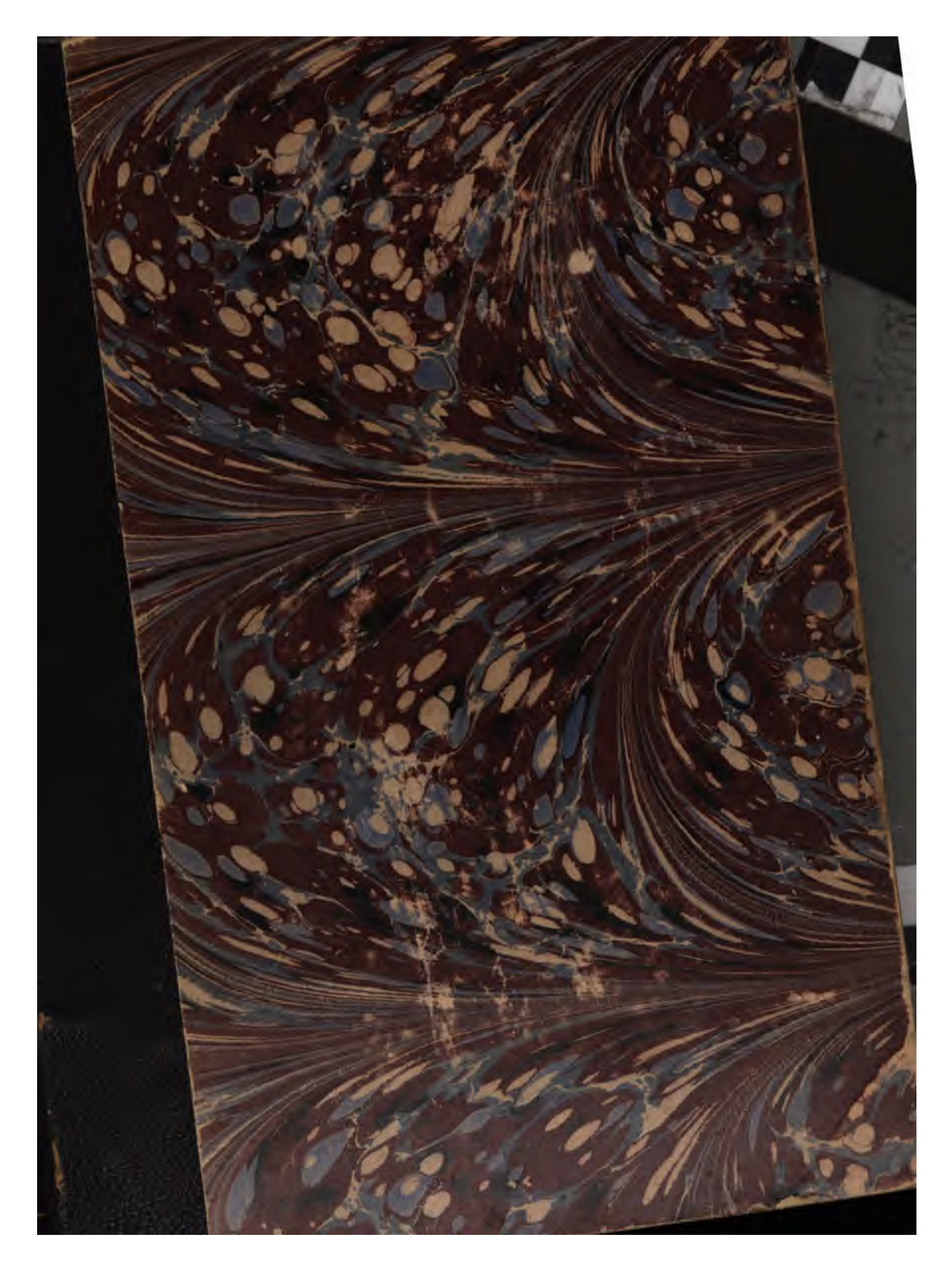
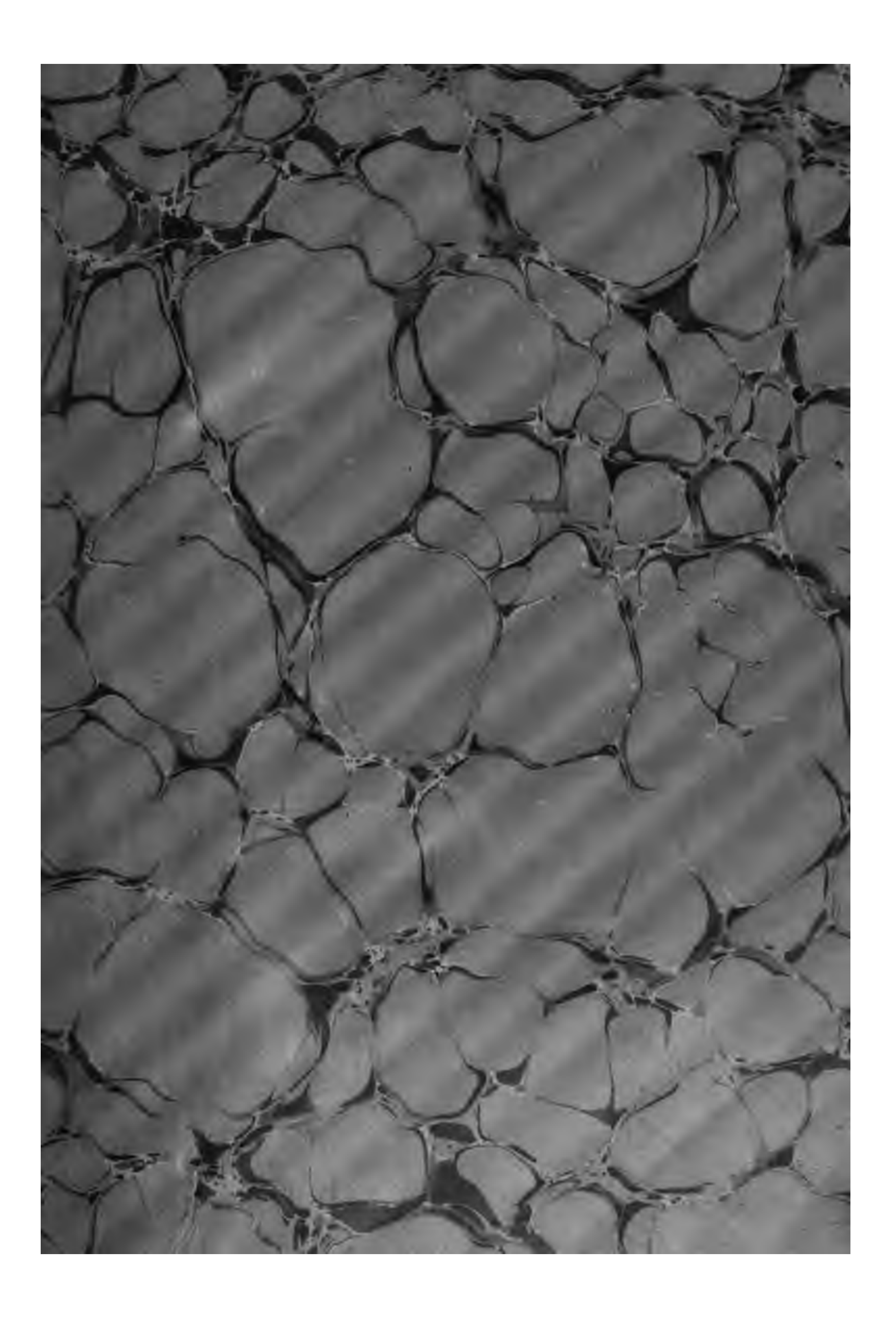
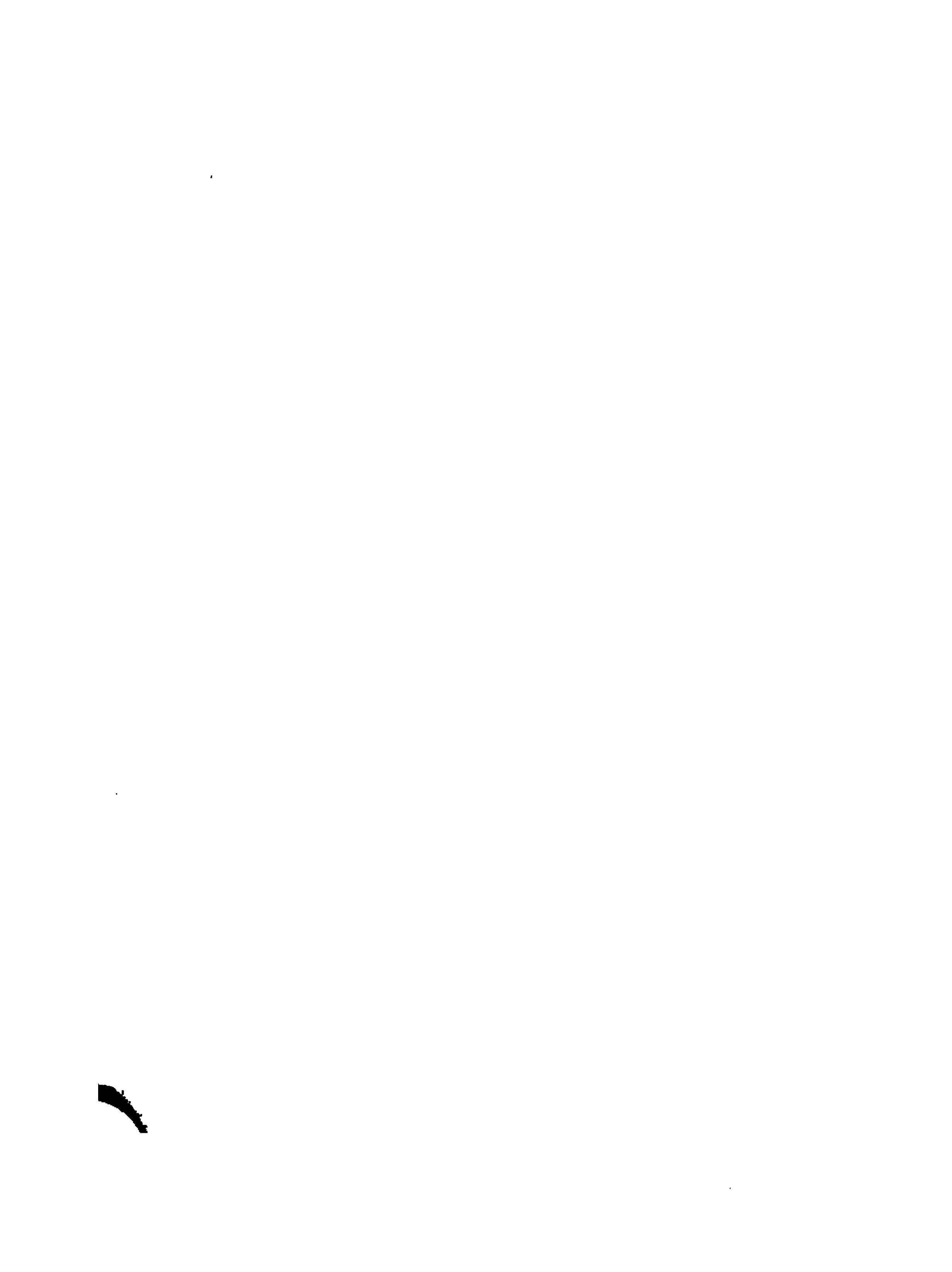





LELAND STANFORD JUNIOR UNIVERSITY
ORGANIZED 1891
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES







MATHEMATIQUES



RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES.



RÉCRÉATIONS

MATHÉMATIQUES.





RÉCRÉATIONS
MATHÉMATIQUES

PAR

ÉDOUARD LUCAS.

Comme il y a une infinité de choses sages qui sont menées d'une manière très folle, il y a aussi des folies qui sont conduites d'une manière très sage.

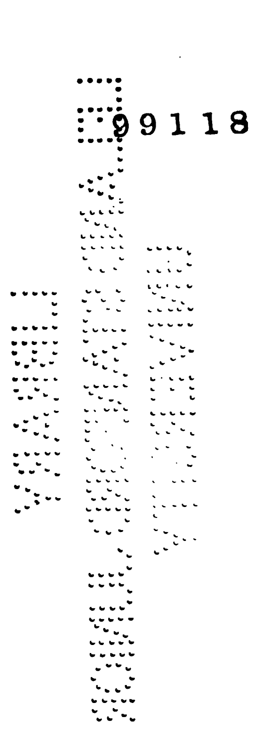
(MONTESQUIEU).

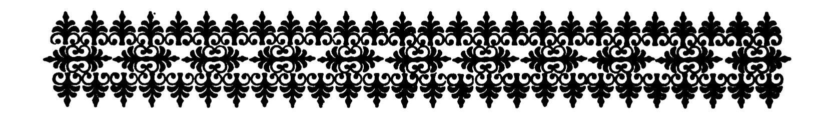
DEUXIÈME ÉDITION

Les Traversées. — Les Ponts.
Les Labyrinthes. — Les Reines. — Le Solitaire.
La Numération.
Le Baguenaudier. — Le Taquin.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

1891


99118



PRÉFACE.

« L'homme est si malheureux, qu'il s'ennuierait même sans aucune cause d'ennui, par l'état propre de sa complexion ; et il est si vain, qu'étant plein de mille causes essentielles d'ennui, la moindre chose, comme un billard et une balle qu'il pousse, suffit pour le divertir.

« Mais, direz-vous, quel objet a-t-il en tout cela? Celui de se vanter demain entre ses amis de ce qu'il a mieux joué qu'un autre. Ainsi les autres suent dans leur cabinet pour montrer aux savants qu'ils ont résolu une question d'algèbre qu'on n'aurait pu trouver jusqu'ici.»

(PASCAL. — *Pensées.*)

DANS le monde, il y a mauvaise grâce à parler de soi ou des siens. Dans une préface, c'est la loi, loi dont on a beaucoup médit, dont on médira toujours, — par convenance, — mais qui fait trop joli jeu à la vanité des auteurs, pour jamais mourir. On me permettra donc d'insister un peu sur ce livre.

Il y a vingt ans qu'il a été projeté. Je rêvai en même temps d'éditer les écrits encore épars d'un des plus grands génies de l'humanité, les Œuvres de Fermat; puis de publier un ouvrage sur la *Théorie des Nombres*. Ces méditations difficiles et pro-

fondes devaient offrir plus d'une obscurité, en un temps et dans un pays où l'Arithmétique Supérieure est délaissée par les géomètres et par l'enseignement officiel. Sur elles, je greffai la plupart de mes travaux et les ramifications ordinaires de la recherche personnelle.

Ce n'est pas tout. Les Œuvres de Fermat soulèvent d'importants problèmes bibliographiques qui ne sont pas encore résolus. Des manuscrits étaient à retrouver, des méthodes à restituer, toutes choses qui, je l'espère, seront prochainement menées à bonne fin [1]. Bref, l'édition a nui au livre, le livre à l'édition; à tous deux les labeurs du devoir professionnel, et peut-être aussi cette nécessité de nature qui veut, dit Beaumarchais, « que les ouvrages de l'esprit soient, comme les enfants des femmes, conçus avec volupté, menés à terme avec fatigue, enfantés avec douleur. »

Le lecteur s'étonnera peut-être que je me sois amusé à des choses de si petite conséquence, et demandera : A quoi bon ce livre? Je suis bien tenté de lui répondre sentimentalement avec Bachet : « Que les livres sont les enfants de nos esprits, et que, outre l'inclination naturelle qu'ont tous les pères d'aimer leurs enfants généralement, ils portent encore une affection particulière à leurs premiers-nés. C'est pourquoi, ce livre étant le premier qui soit sorti de ma main et comme l'enfant premier-né de mon esprit, c'est avec juste raison que je le chéris particulièrement, et que je ne me contente pas de l'avoir mis au monde,

(1) Le premier volume de la *Théorie des Nombres* vient de paraître; les autres suivront, avec mon *Commentaire sur les Œuvres de Fermat;* puis *l'Histoire, la Pratique et les Progrès du Calcul, dans tous les temps, chez tous les peuples.*

mais je veux encore prendre le soin de sa conservation et de son accroissance. »

Bachet ajoute plus solidement, et ce sera aussi ma défense : « En outre, je ne crois pas que ceux qui auront pénétré dans ce livre plus avant que l'écorce le jugent de si peu de valeur que feront ceux-là qui n'en auront lu que le titre; car encore que ce ne soient que des jeux dont le but principal est de donner une honnête récréation, et d'entretenir avec leur gentillesse une compagnie, si est-ce qu'il faut bien de la subtilité d'esprit pour les pratiquer parfaitement, et faut être plus que médiocrement expert en la science des nombres pour entendre les démonstrations et pour se savoir aider de plusieurs belles inventions que j'ai ajoutées. »

D'ailleurs, à quoi n'a-t-on pas objecté l'inutilité? Entendant louer le commentaire de Bachet sur Diophante, Malherbe demande *s'il fera diminuer le prix du pain.* Roberval, au sortir du théâtre, dans l'âge d'or de la tragédie, lance ce mot devenu classique : *Qu'est-ce que cela prouve?* Il y eut toujours et toujours il y aura des savants pour dénigrer la fantaisie, des poètes pour répondre : A quoi bon la science? des gens pratiques pour envelopper poètes et savants dans un inépuisable dédain d'abstrait et d'idéal. Et tout cela est bien heureux.

Savoir, c'est pouvoir; ce mot est vrai de tous les savoirs. Incarner dans une phrase musicale ou parlée un rythme inoubliable et inentendu, dans une toile des tons inobservés et typiques, dans un marbre les enchantements et les défaillances de la forme, c'est pouvoir, si créer pour toujours un monde de sensations et d'idées, c'est pouvoir. Recueillir avec la piété du néophyte des fragments du passé, et revêtir ces reliques de toutes

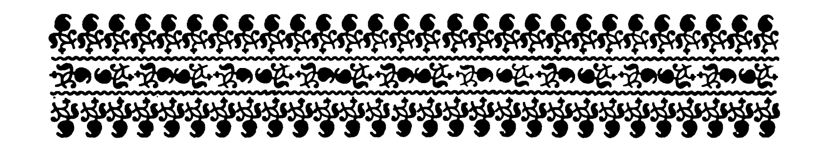
les magies du style, c'est pouvoir, si ressusciter des personnalités éteintes, c'est pouvoir. Voyager à travers l'espace, le temps et le mouvement, sans autre limite possible que l'effort du coup d'aile, c'est pouvoir, si tisser des composés inconnus de la nature, diriger la foudre, évoquer les mondes disparus, unir par quelques chiffres des globes destinés à s'ignorer toujours, c'est pouvoir. Vrai pour l'artiste, l'érudit, le chimiste, lè physicien, l'astronome, le mot de Bacon est également vrai pour le géomètre. En disséquant les résultats du calcul, en créant des abstractions, en les combinant, variant, tourmentant, le géomètre fortifie le raisonnement et acquiert sur cet universel outil un pouvoir infini.

Le livre, a-t-on dit, est une conversation avec les amis inconnus. La partie de cet ouvrage qui a été publiée dans la première édition ne m'a point seulement révélé des sympathies, elle a fait naître des collaborations qui m'ont permis de présenter le nouvel ouvrage en quatre volumes.

Souvent j'aurai à enregistrer de gracieuses communications : remarques ingénieuses, solutions élégantes; chaque fois que l'occasion s'en présentera, je citerai les noms. Mais, dès à présent, j'adresse mes plus vifs remerciements à mon ami sincère et dévoué, Henry Delannoy, qui a contribué pour la plus grande part à la seconde édition de cet ouvrage.

Un dernier mot. Si ces pages plaisent à quelques savants, si elles intéressent quelques gens du monde, si elles inspirent à quelques jeunes intelligences le goût du raisonnement et le désir des jouissances abstraites, je serai satisfait.

Paris, mai 1891.



INTRODUCTION.

> « La dernière chose qu'on trouve en faisant un ouvrage est de savoir celle qu'il faut mettre la première. »
>
> (PASCAL. — *Pensées.*)

LA GÉOMÉTRIE DE SITUATION.

Un des hommes à qui les sciences doivent le plus de découvertes, et surtout le plus de vues originales et fécondes, Leibniz, était persuadé que l'analyse des géomètres ne pouvait s'appliquer à toutes les questions de la philosophie naturelle. Pour soumettre au calcul les rapports des différents corps, considérés uniquement dans l'ordre de leurs positions, il souhaitait qu'on inventât une Géométrie nouvelle qu'il a nommée *Geometria situs,* c'est-à-dire *Géométrie de situation* (1). « Après tous les progrès que j'ai faits en ces matières, écrivait-il à Huygens à la date du 8 septembre 1679, je ne suis

(1) *Histoire de l'Académie royale des Sciences de Paris* pour l'année 1771; p. 55.

pas encore content de l'Algèbre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Géométrie. C'est pourquoy, lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement *situm*, comme l'Algèbre exprime *magnitudinem*. Et je croy d'en voir le moyen et qu'on pourrait représenter des figures et mesme des machines et mouvemens en caractères, comme l'Algèbre représente les nombres ou grandeurs; et je vous envoye un essay qui me paroist considérable (1). » Leibniz est revenu souvent sur cette idée fondamentale, notamment dans ses remarques ingénieuses sur le *jeu du solitaire*, que l'on doit considérer comme le point de départ des remarquables travaux du docteur Reiss et du capitaine Hermary, exposés et développés dans notre cinquième Récréation.

LE PREMIER MÉMOIRE D'EULER.

Euler a consacré plusieurs mémoires à la Géométrie de situation. Dans un travail qui fait partie des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* pour l'année 1759, et reproduit en français sous ce titre : *Solution d'une question ingénieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse* (2), l'illustre géomètre étudie la marche

(1) CHRISTIANI HUGENII *aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philosophicæ, ex manuscriptis in bibliotheca Academiæ Lugduno-Batavæ servatis edidit* P. J. UYLENBROEK; fasc. I, p. 9. Hagæ Comitum, 1833. — A partir de la page 6 du second fascicule, on trouve la reproduction de l'essai de Leibniz dont il est question dans sa lettre à Huygens.

(2) LEONARDI EULERI. *Commentationes arithmeticæ collectæ.* Petropoli; 1849. Tome I, p. 337.

du cavalier au jeu des échecs et la manière de lui faire parcourir toutes les cases de l'échiquier sans qu'il passe deux fois sur la même. Bien qu'il n'ait pas donné la solution générale, il a indiqué une méthode qui permet de résoudre le problème en partant d'une case quelconque, par la considération des routes dites *rentrantes* ou *circulaires*. Avant lui, cet intéressant problème avait été abordé par trois géomètres français : de Montmort, Moivre, de Mairan. Postérieurement, le sujet fut successivement repris par Lelio della Volpe; par Vandermonde, qui étend la question à l'échiquier cubique ; par Collini, par Warnsdorf, par Legendre qui recherche infructueusement, dans sa *Théorie des Nombres,* le nombre des solutions du problème; par de Lavernède, qui donne la méthode *des quarts;* par Minding, qui publie un important mémoire dans le *Journal de Crelle;* par Ciccolini, qui indique plusieurs routes rentrantes sur l'échiquier de cent cases et considère aussi l'échiquier circulaire. Plus récemment, les derniers obstacles imposés au saut du cavalier semblent franchis : Wenzelidès, dans la *Schachzeitung* de Berlin, construit des routes qui, figurées en nombres, produisent des carrés magiques; de Lavernède, Libri, le docteur Roget, l'abbé Durand, Troupenas, etc., dans la *Régence*, dans le *Palamède,* etc. ; le comte de Basterot, dans son *Traité élémentaire du jeu des échecs;* le major Jaenisch, dans son *Traité des applications de l'Analyse mathématique au jeu des échecs,* perfectionnent les travaux de leurs devanciers. Enfin, dans ces derniers temps, les résultats les plus nombreux et les plus intéressants sont obtenus par Volpicelli, qui s'occupe de l'échiquier quelconque, carré ou rectangulaire, à l'*Académie des Nuovi Lincei;* par M. le prince C. de Polignac, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris ;*

par le révérend A.-H. Frost, dans *The Quaterly Journal of pure and applied Mathematics;* par M. Flye-Sainte-Marie, dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France;* et par M. Laquière, dans sa *Géométrie de l'échiquier.*

En 1823, C. de Warnsdorf a proposé une règle pour résoudre le problème du cavalier, avec une rigueur scientifique, sans aucun tâtonnement, sans faux pas. Voici la traduction de son énoncé : 1° A chaque coup, on joue le cavalier sur la case voisine qui communique par le plus petit nombre d'issues avec la partie encore inoccupée de l'échiquier. 2° Si, à un coup quelconque, il se présente plusieurs cases qui offrent le même nombre minimum d'issues, on est libre de passer sur l'une quelconque d'entre elles. Malheureusement ce procédé ne conduit qu'aux solutions les moins élégantes du problème; son application rigoureuse est assez pénible et les nombreuses infractions que l'on peut commettre, bien que constituant une ressource empirique très précieuse, ne reposent sur aucun principe certain. Mais il faut dire qu'à défaut d'une démonstration mathématique rigoureuse, le nombre prodigieux d'essais faits jusqu'à ce jour ne permet guère de douter de l'exactitude de la première partie de la règle. Et celle-ci, cependant, n'est pour ainsi dire que la formule, que la *Loi de prudence,* qu'il y a lieu d'appliquer dans la vie à tous les moments d'indécision, lorsqu'il faut choisir entre plusieurs routes, pour parvenir à des positions différentes.

Depuis l'apparition de notre premier volume de *Récréations,* la Géométrie de situation a fait des progrès notables; sur le problème particulier du saut du cavalier, de nombreux et importants résultats ont été obtenus par M. l'abbé Jolivald, dans ses recherches sur les méthodes d'Euler et de Vandermonde; par Exner

et par M. le vicomte du Ligondès sur la polygraphie du cavalier appliquée à la recherche des carrés magiques. Notre Récréation sur le *Jeu de la Fasioulette* est consacrée à l'étude de ce problème et aux derniers résultats obtenus par M. l'intendant Delannoy et par M. le général Parmentier.

LE SECOND MÉMOIRE D'EULER.

Un autre mémoire d'Euler ayant pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis,* est consacré à la solution du fameux problème des ponts de la Pregel. Notre deuxième Récréation, sur le jeu des ponts et des îles, n'est, pour ainsi dire, que le commentaire et le développement de cette étude, qui est devenue le point d'attache d'un rameau de la Géométrie de situation. On donne une figure quelconque formée de points en nombre arbitraire, réunis par des lignes droites ou courbes; quel est le nombre minimum de traits continus, sans arrêt ni répétition, qui sont nécessaires à sa description complète ? Tel est l'énoncé de ce problème général qui sert d'introduction à la théorie des courbes algébriques ou transcendantes, et en particulier aux figures d'un seul trait, aux courbes unicursales. Nous démontrerons, dans notre troisième Récréation, détruisant ainsi le préjugé de l'inextricabilité des labyrinthes, que l'on peut toujours décrire complètement un réseau géométrique quelconque par un double trait continu ; la solution fort ingénieuse que nous exposons est due à la collaboration de Trémaux, ancien élève de l'École Polytechnique.

Pour parcourir complètement, deux fois, toutes les allées d'un labyrinthe, en partant d'un point quelconque, il suffit d'observer

les règles posées par Trémaux, en marquant chaque fois le passage aux différents carrefours, à l'entrée et à la sortie; ces règles se résument en celle-ci : *Éviter autant que possible le passage des carrefours déjà visités, puis éviter le parcours des chemins déjà parcourus.* N'est-ce pas encore une *loi de prudence* qui trouverait son application dans la vie ordinaire?

Nous avons donné dans le premier volume de notre *Théorie des Nombres,* au chapitre VII sur la *Géométrie de situation,* une étude complète du second mémoire d'Euler. Mais nous avons pu y ajouter une seconde partie dans laquelle il ne suffit plus de déterminer les conditions du tracé des réseaux en un ou plusieurs traits, mais de déterminer, dans chaque cas, le nombre des tracés. Cette partie est autrement difficile que la première; jusqu'à ces dernières années le problème paraissait inaccessible; on ne connaissait qu'un exemple particulier de cette question, traité par le docteur Reiss sous la forme suivante : *De combien de manières peut-on placer, en ligne droite, les vingt-huit dés d'un jeu de dominos, conformément à la règle du jeu?* Ce problème revient à celui-ci : *De combien de manières peut-on décrire, sans arrêt, ni répétition, le réseau géométrique formé par les côtés et les diagonales d'un polygone régulier de sept côtés, sans fragmenter les diagonales?* On se rend facilement compte de l'identité des deux problèmes, après la suppression des doubles, en numérotant par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, les sommets de l'heptagone. Mais la solution du docteur Reiss était particulière et vraiment trop longue, difficile à vérifier. M. Tarry, contrôleur des contributions diverses, à Alger, a donné une solution très simple, au moyen de deux beaux théorèmes que nous exposons dans cet ouvrage.

LE TROISIÈME MÉMOIRE D'EULER.

Le troisième mémoire d'Euler a été publié dans les *Comptes rendus de la Société des Sciences de Flessingue;* il a pour titre : *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques,* et commence ainsi : « Une question fort curieuse, qui a exercé pendant quelque temps la sagacité de bien du monde, m'a engagé à faire les recherches suivantes, qui semblent avoir une nouvelle carrière dans l'analyse, et en particulier dans la doctrine des combinaisons. Cette question rouloit sur une assemblée de trente-six officiers de six différens grades et tirés de six régimens différens qu'il s'agissoit de ranger dans un carré, de manière que sur chaque ligne, tant horizontale que verticale, il se trouvât six officiers tant de différens caractères que de régimens différens. Or, après toutes les peines qu'on s'est données pour résoudre ce problème, on a été obligé de reconnoître qu'un tel arrangement est absolument impossible, quoiqu'on ne puisse pas en donner de démonstration rigoureuse. » Ce mémoire de 154 pages in-8° donne, sous une forme intéressante, la solution du problème des carrés magiques. Mais qu'est-ce donc qu'un carré magique?

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Écrivons les neuf premiers nombres dans un carré de neuf cases,

conformément au tableau. Cette figure possède les propriétés suivantes : 1° La somme des nombres renfermés dans la même ligne horizontale est égale à 15 pour chacune des trois lignes; 2° la somme des nombres renfermés dans la même colonne verticale est égale à 15 pour chacune des trois colonnes; 3° la somme des nombres renfermés dans chacune des deux diagonales du carré est encore égale à 15; on dit que cette figure forme un carré magique de neuf éléments. Si l'on écrit les seize premiers nombres dans l'ordre suivant, on obtient une figure telle, que la somme des nombres renfermés dans une même ligne, dans une même colonne, ou dans une même diagonale, est toujours

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

égale à 34. C'est le carré magique de seize cases qui se trouve déjà représenté dans la célèbre *Melencholia* d'Albert Dürer, burinée en 1514 [1]. Plus généralement, si l'on dispose dans un échiquier de n^2 cases, les n^2 premiers nombres entiers, de telle sorte que la somme des nombres renfermés dans chacune des n colonnes, dans chacune des n lignes, ou dans chacune des

[1] THAUSING. — *Albert Dürer. Sa vie et ses œuvres.* Trad. par GRUYER; Paris, 1878. La date 1514 se lit sur le carré.

deux diagonales, soit constamment la même, on forme le carré magique de n^2 éléments. Ces figures étaient connues bien des siècles avant Euler.

On ne sait pas l'origine des carrés magiques, mais on attribue leur découverte aux Indiens. Dans la relation de son voyage de 1687, M. de la Loubère, envoyé extraordinaire auprès du roi de Siam, rapporte ce qui suit : « M. Vincent, dont j'ay souvent parlé dans ma Relation, me voyant un jour dans le vaisseau, pendant notre retour, ranger par amusement des carrés magiques à la manière de Bachet, me dit que les Indiens de Surate les rangeoient avec bien plus de facilité, et m'enseigna leur méthode pour les quarrés impairs seulement, ayant, disoit-il, oublié celle des pairs [1]. » Cependant il y a beaucoup d'apparence que ces carrés ont tiré leur nom des opérations superstitieuses auxquelles ils étaient employés, telles que la construction des talismans ; car, selon la puérile philosophie de ceux qui donnaient des vertus aux nombres, quelle vertu ne devaient pas avoir des nombres si merveilleux ? « Ce qui a donc commencé par être une vaine pratique de Faiseurs de Talismans, ou de Devins, est devenu dans la suite le sujet d'une recherche sérieuse pour les mathématiciens, non qu'ils aient cru qu'elle les pût mener à rien d'utile ni de solide ; les quarrés magiques se sentent toujours de leur origine sur ce point, ils ne peuvent être d'aucun usage ; ce n'est qu'un jeu dont la difficulté fait le mérite, et qui peut seulement faire naître sur les nombres quelques vues nouvelles dont les mathématiciens ne veulent pas perdre l'occasion [2]. »

[1] De la Loubère. — *Du royaume de Siam*, t. II, p. 237. Amsterdam, 1691.
[2] *Histoire de l'Académie royale des Sciences* pour l'année 1705 ; p. 70. Paris, 1706.

Parmi les savants qui se sont occupés, avant Euler, de ce problème, on doit citer : Moschopulos [1], Agrippa, Théophraste, Paracelse, Cardan, Stifel, Bachet, Kircher, Frénicle, et plus spécialement Fermat, de la Hire et Sauveur [2]. Les recherches de Fermat sont consignées dans deux lettres adressées à Mersenne. « En voila assés, écrivait-il, pour donner de l'exercice à M. de Frénicle, car je ne sçay gueres rien de plus beau en l'Arithmétique que ces nombres que quelques-uns appellent *Planetarios*, et les autres *Magicos;* et de fait j'ay veu plusieurs talismans où quelques-uns de ces quarrés rangez de la sorte sont décrits, et parmy plusieurs un grand d'argent, qui contient le 49 rangé selon la méthode de Bachet, ce qui fait croire que personne n'a encore cónnu la générale, ny le nombre des solutions qui peuvent arriver à chaque quarré; si la chose est sceuë à Paris, vous m'en éclaircirez; en tout cas, je ne la dois qu'à moy seul [3]. » Après Euler, on doit citer Franklin, qui donne une nouvelle solution du carré magique de 16^2 éléments, et invente les cercles magiques. Au XIXe siècle, les principaux auteurs sont : en Allemagne, Mollweide, Hügel, Pessl qui s'occupe de cylindres magiques; en Angleterre, Horner, Drach, Thompson, Holditch et Frost; en France, Violle, qui écrit un grand traité sur ce sujet.

Ainsi qu'on vient de le voir, l'étude des carrés magiques était

(1) Dans une très intéressante monographie sur les carrés magiques (*Vermischte Untersuchungen*, ch. IV), M. Günther, membre du parlement de Berlin, a publié le texte grec du manuscrit de Moschopulos, auteur byzantin de la fin du moyen âge.

(2) M. Mansion, professeur à l'Université de Gand, a exposé dans l'*Abeille* (t. XVIII, p. 222-225) le principe de la méthode de Sauveur qui repose sur la considération des systèmes de numération, et diffère peu de la méthode d'Euler.

(3) Fermat. — *Varia opera mathematica*. Tolosæ, 1679; p. 175-177.

regardée, et l'est encore aujourd'hui, comme un jeu d'une extrême difficulté, mais ne pouvant être d'aucun usage; c'était aussi l'opinion de Franklin qui, dans une lettre à Collinson ([1]), les appelle « *difficiles nugæ* ». Au contraire, nous montrerons qu'il n'en est plus ainsi lorsque l'on ajoute aux conditions ordinaires du carré magique de nouvelles conditions telles, que le carré reste magique après une permutation circulaire quelconque des lignes ou des colonnes. En d'autres termes, si l'on divise un tel carré en deux rectangles égaux ou inégaux, par une ligne horizontale ou verticale, le carré doit demeurer magique, après l'échange des deux fragments du carré; par suite, un nombre quelconque du carré peut occuper une case quelconque. Pour les distinguer des autres, nous appellerons ceux-ci *Carrés Diaboliques;* ils ont été entrevus par de la Hire, Euler et Sauveur. Voici, par exemple, deux carrés diaboliques :

15	6	9	4
10	3	16	5
8	13	2	11
1	12	7	14

23	6	19	2	15
4	12	25	8	16
10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9

Ce sont des carrés diaboliques de 16 cases et de 25 cases.

([1]) Franklin. — *Experiments and Observations on Electricity*, p. 350. London, 1764.

Lorsque l'on cherche à déterminer la multitude des carrés diaboliques, on se trouve directement conduit à la connaissance d'une nouvelle fonction numérique dont l'étude trouvera son importance dans l'Arithmétique Supérieure. Mais, à côté de cette application théorique du problème des carrés diaboliques, vient s'en placer une autre plus pratique. En effet, nous ferons voir que notre méthode de construction des carrés diaboliques ne diffère pas de celle que nous avons indiquée, en 1867, pour la construction de l'armure des satins réguliers. En d'autres termes, l'étude des carrés diaboliques est le principe arithmétique d'une branche de la Géométrie de situation que nous avons appelée *Géométrie du tissage,* et dont nous allons indiquer les origines.

LE MÉMOIRE DE VANDERMONDE.

En 1774, paraissait dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1771, sous ce titre vraiment modeste: *Remarques sur les problèmes de situation,* un remarquable travail de Vandermonde. Ce mémoire débute ainsi: « Quelles que soient les circonvolutions d'un ou de plusieurs fils dans l'espace, on peut toujours en avoir une expression par le calcul des grandeurs ; mais cette expression ne serait d'aucun usage dans les arts. L'ouvrier qui fait une *tresse,* un *réseau,* des *nœuds,* ne les conçoit pas par les rapports de grandeur, mais par ceux de situation : ce qu'il y voit, c'est l'ordre dans lequel sont entrelacés ces fils. Il serait donc utile d'avoir un système de calcul plus conforme à la marche de l'esprit de l'ouvrier, une notation qui ne représentât que l'idée qu'il se forme de son ouvrage, et qui pût suffire pour en faire un semblable dans tous les temps. » Le

but de l'auteur est de faire entrevoir la possibilité d'une pareille notation, et son usage dans les questions sur les tissus de fils ; ce mémoire contient ainsi le germe de la géométrie du tissage, que Leibniz avait aussi entrevue. C'est la véritable introduction à cette géométrie, car on y trouve l'indication importante de l'emploi du système des coordonnées cartésiennes de la géométrie analytique à l'étude de tous les problèmes qui concernent la position indépendamment de la grandeur. Cependant l'idée de Vandermonde appartient plutôt à la géométrie des fils curvilignes ; c'est à celle-ci qu'il faut rapporter les procédés qui servent à tricoter, à fabriquer les filets, les diverses espèces de nœuds en usage dans l'artillerie, dans la marine, dans le tissage, etc. C'est encore à cette géométrie qu'il faut rattacher le problème suivant dont on trouve l'origine dans les *Récréations* d'Ozanam (t. IV, p. 222 de l'édition de 1725), dans le jeu nommé *Sigillum Salomonis*, décrit dans le même ouvrage, et dans quelques autres complications de ficelles, de la nature du *nœud Gordien* : On dessine sur le papier une courbe fermée contenant des points doubles en nombre quelconque, et l'on suppose que le trait représente un fil continu, sans fin ; puis on indique par un signe quelconque quelle est celle des deux portions du fil qui se trouve au-dessus de l'autre, à chacun des points de croisement. Cela posé, quel est le nombre minimum des nœuds qui resteront formés lorsque l'on cherchera à débrouiller ce fil ?

LA TOPOLOGIE DE LISTING.

Dans deux importants mémoires, trop ignorés aujourd'hui, Listing a posé les principes généraux de la Géométrie de situa-

tion. Ses *Vorstudien zur Topologie* (1847) ont été l'objet d'un rapport sommaire dans le *Traité d'Electricité et de Magnétisme* de Clerk-Maxwell, et d'un exposé élémentaire par M. Cayley, dans le *Messenger of Mathematics* (1873). Dans son mémoire de 1861, intitulé *Der Census raümlicher Complexe,* Listing s'occupe de la formation et de la classification des nœuds ; cette idée a été reprise dans plusieurs mémoires présentés à la Société royale des Sciences d'Edimbourg, par M. Tait qui a retrouvé la plupart des résultats de Listing, à propos de l'idée de M. Thomson sur les *Vortex-Atoms.* La géométrie des nœuds est un des chapitres de la géométrie du tissage.

LA GÉOMÉTRIE DU TISSAGE.

La géométrie des tissus à fils rectilignes a pour objet la construction et la classification de tous les systèmes possibles d'entrecroisement des fils de chaîne et de trame. Les premiers essais sur ce sujet ont été publiés, en 1867, dans notre opuscule intitulé : *Application de l'Arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers.* Mais, depuis, nous avons ajouté de nouveaux développements dans des communications aux divers congrès de l'Association française. Cette théorie a donné lieu à d'autres travaux analogues, parmi lesquels nous citerons ceux de M. Gand, à la Société industrielle et à l'Académie d'Amiens ; de MM. Thiele, Broch et Tchebychef, aux congrès de Lille et de Paris ; de MM. Laisant, Laquière et de Polignac, à la Société mathématique de France ; de M. Cerruti, à l'École professionnelle de Biella. Dans notre opuscule : *Principii fondamentali della geometria dei tessuti,* nous avons donné le premier cha-

pitre de cette géométrie. Il contient la définition et la construction des armures fondamentales, qui reproduisent toutes les autres, par combinaison ou par mélange, de même que les corps simples de la Chimie composent tous les corps artificiels ou naturels.

Les armures fondamentales sont divisées en deux classes : les sergés et les satins réguliers, en considérant l'armure de la toile comme le sergé le plus simple. Si l'on numérote successivement les divers points de liage ou de croisement des fils d'un satin, ainsi que ceux de satins parallèles soumis à certaines lois, de manière à couvrir le quadrille de l'armure, on obtient les carrés diaboliques ; inversement, ceux-ci représentent toutes les combinaisons des armures fondamentales. Ainsi, les carrés que nous avons figurés précédemment contiennent les armures du *satin contredit* sur quatre fils de chaîne et du *satin carré* sur cinq fils. En outre, nous avons constaté l'identité de construction des carrés magiques des Indiens et des armures des sergés composés. Qui sait s'il ne faut pas chercher dans l'observation de la structure des anciens châles du royaume de Cachemire, l'origine des carrés magiques ?

Nous arrêterons ici cette rapide revue, car dans le cours de ce livre l'occasion se présentera nécessairement de citer et de développer les recherches plus récentes. Nous aurions pu également remonter plus haut, mais cette face de la question historique se précisera par le développement même de notre travail et par la lecture de l'Index bibliographique qui termine ce volume.

Dans son *Essai d'éducation nationale,* La Chalotais insiste à diverses reprises sur la nécessité et sur l'utilité d'instruire les enfants par les récréations. « Je suppose, dit-il, qu'un enfant sache déjà lire et écrire, qu'il sache même dessiner, ce que je

regarde comme nécessaire, je dis que les premiers objets dont on doit l'occuper depuis cinq à six ans jusqu'à dix sont l'Histoire, la Géographie, l'Histoire naturelle, des Récréations physiques et mathématiques; connaissances qui sont à sa portée, parce qu'elles tombent sous les sens, parce qu'elles sont les plus agréables et par conséquent les plus propres à occuper l'enfance. » Et plus loin: « La Géométrie ne demande pas plus d'application que les jeux de piquet et de quadrille. C'est aux mathématiciens à trouver une route qui n'ait pas encore été frayée. On pourrait peut-être commencer par des Récréations mathématiques [1]. »

Nous serions heureux de contribuer à rendre l'expérience possible et concluante.

[1] *Essai d'Éducation nationale, ou Plan d'études pour la jeunesse*, par messire Louis-Réné de Caradeuc de La Chalotais, procureur général du Roi au Parlement de Bretagne; 1763.



PREMIÈRE RÉCRÉATION.

LE JEU DES TRAVERSÉES EN BATEAU.

A Monsieur l'amiral de Jonquières, préfet maritime à Rochefort.

« C'est le principal défaut de beaucoup de savants, qu'ils ne s'amusent qu'à des discours vagues et rebattus, pendant qu'il y a un si beau champ à exercer leur esprit dans des objets solides et réels, avec l'avantage du public. Les chasseurs, les pêcheurs, les marchands, les mariniers voyageurs et même les jeux tant d'adresse que de hasard fournissent de quoi augmenter considérablement les sciences utiles. Il y a presque dans les exercices des enfants ce qui pourrait arrêter le plus grand mathématicien. »

(LEIBNIZ. — *Oper. phil.*)





PREMIÈRE RÉCRÉATION.

—

LE JEU DES TRAVERSÉES EN BATEAU.

HISTORIQUE. — BIOGRAPHIE DE BACHET.

Cette première récréation contient la discussion, la rectification et la généralisation de plusieurs problèmes de l'antiquité, qui se rapportent à la géométrie de l'ordre et de la situation.

Quant à l'origine des problèmes qui suivent, nous la croyons inconnue, comme celle du baguenaudier, dont nous donnons la théorie dans la septième récréation. Peut-être y a-t-il une connexion entre le problème des trois maris jaloux et le jeu du baguenaudier de trois anneaux. C'est une question à élucider.

Il est facile de réaliser le jeu des traversées en se servant des cartes d'un jeu de piquet, pour le problème de trois ou de quatre ménages; s'il y a plus de ménages, on prendra plusieurs jeux. On peut aussi remplacer les cartes par des jetons numérotés blancs et roses, ou de deux couleurs quelconques. En lisant

attentivement la discussion du problème que nous donnons plus loin, d'après Bachet lui-même, on apprendra assez rapidement la manœuvre de ce jeu intéressant. Bachet est l'un des premiers auteurs français qui aient écrit sur l'arithmétique et sur la géométrie de situation; nous extrayons de la Préface de nos *Recherches sur l'Analyse indéterminée et sur l'Arithmétique de Diophante* (Moulins, 1873), la notice biographique suivante :

Gaspar Bachet, sieur de Méziriac, né à Bourg-en-Bresse, en 1581, et mort en 1638, était un géomètre et un littérateur distingué. Il fut, à la suite d'un voyage en Italie avec le grammairien Vaugelas, proposé comme précepteur de Louis XIII; mais comme il n'était pas ambitieux, il quitta précipitamment la capitale, tout effrayé, et disant qu'il n'avait jamais été si en peine, s'imaginant déjà porter sur ses épaules le lourd fardeau du royaume. De retour dans sa ville natale, il se maria, et son choix fut heureux à ce qu'il paraît, car il avoue lui-même que c'était la meilleure chose qu'il eût jamais faite. C'est au milieu du calme de cette vie intérieure qu'il découvrit la résolution de l'équation indéterminée du premier degré en nombres entiers, publia deux éditions successives de son *Recueil de Problèmes plaisants et délectables qui se font par les Nombres* (Lyon, 1613 et 1624), et son commentaire sur l'*Arithmétique de Diophante* (Paris, 1621).

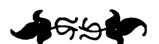


LA TRAVERSÉE D'UN RÉGIMENT DANS UN BATELET.

Une compagnie d'infanterie s'avance sur le bord d'un fleuve; mais le pont est brisé, la rivière est profonde. Le capitaine aperçoit, sur le bord, deux enfants qui jouent dans un petit canot; ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter plus d'un soldat. Comment s'y prendra le capitaine pour faire passer le fleuve aux soldats de sa compagnie?

Les deux enfants traversent la rivière; l'un d'eux reste sur la seconde rive, et l'autre ramène le bateau. Puis l'un des soldats traverse la rivière, et l'enfant passé ramène le bateau.

Par cette tactique, de deux allers et de deux retours, un soldat passe. On la recommencera autant de fois qu'il y a d'hommes dans la compagnie, en y comprenant le capitaine et ses lieutenants.



LA TRAVERSÉE DU BATELIER.

Sur le bord d'une rivière se trouvent un loup, une chèvre et un chou; il n'y a qu'un bateau si petit, que le batelier seul et l'un d'eux peuvent y tenir. Il est question de les passer tous trois, de telle sorte que le loup ne mange pas la chèvre, ni la chèvre le chou, pendant l'absence du batelier.

Le batelier commencera par passer la chèvre; puis il retournera prendre le loup; quand il aura passé le loup, il ramènera la chèvre, qu'il laissera sur la première rive pour passer le chou du

côté du loup. Enfin il retournera prendre la chèvre, et la passera. Par ce moyen, le loup ne se trouvera donc avec la chèvre, ni la chèvre avec le chou, qu'en présence du batelier.



LA TRAVERSÉE DES TROIS MÉNAGES.

Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière, et rencontrent un bateau sans batelier; ce bateau est si petit, qu'il ne peut porter plus de deux personnes à la fois. On demande comment ces six personnes passeront, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un ou de deux hommes, si son mari n'est présent.

La solution de ce problème antique est contenue dans les vers latins que voici :

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit et redeunt bini; mulierque sororem
Advehit : ad propriam sine maritis abit.

En d'autres termes, désignons les maris jaloux par les grandes lettres A, B, C, et leurs femmes respectives par les petites lettres correspondantes *a, b, c*; on a, au départ,

Première rive.	*Deuxième rive.*
C B A	. . .
c b a	. . .

On opérera de la manière suivante, en observant qu'après chaque voyage le bateau est amarré à la seconde rive.

I. — Deux femmes passent d'abord :

C	B	A		.	.	.
c	.	.		.	*b*	*a*

II. — Une femme revient et emmène la troisième :

C	B	A		.	.	.
.	.	.		*c*	*b*	*a*

III. — Une femme revient, reste avec son mari, et les deux autres maris passent :

C	.	.		.	B	A
c	.	.		.	*b*	*a*

IV. — Un mari revient avec sa femme qu'il laisse, et emmène l'autre mari :

.	.	.		C	B	A
c	*b*	.		.	.	*a*

V. — La femme passée revient chercher l'une des deux autres :

.	.	.		C	B	A
c	.	.		.	*b*	*a*

VI. — L'une des femmes passées revient chercher la dernière :

.	.	.		C	B	A
.	.	.		*c*	*b*	*a*

Au moyen de la réalisation du jeu par des cartes ou des jetons, il sera facile de comprendre le raisonnement de Bachet, que nous reproduisons ci-dessous : « Il semble que cette question ne soit fondée en aucune raison; mais toutefois la condition apposée qu'il ne faut point qu'aucune femme demeure accompagnée d'aucun des hommes si son mari n'est présent, nous peut guider

pour trouver la solution d'icelle par un discours infaillible. Car il est certain que pour passer deux à deux, il faut ou que deux hommes passent ensemble ou deux femmes, ou un homme avec sa femme. Or, *au premier passage*, on ne peut faire passer deux hommes (car alors un homme seul demeurerait avec les trois femmes, contre la condition); donc il est nécessaire que deux femmes passent, ou qu'il passe un homme avec sa femme; mais ces deux façons reviennent à une, d'autant que si deux femmes passent, il faut que l'une ramène le bateau; partant une seule se treuve en l'autre rive; et si un homme passe avec sa femme, le même adviendra, d'autant que l'homme doit ramener le bateau (car si la femme le ramenait, elle se treuverait avec les deux autres hommes sans son mari).

« *Au second passage*, deux hommes ne peuvent passer, car l'un deux lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme; un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car, étant passé, il se trouverait seul avec deux femmes); il est donc nécessaire que les deux femmes passent: ainsi les trois femmes étant passées, il faut que l'une d'icelles ramène le bateau. Quoi fait, *au troisième passage*, où restent à passer les trois hommes et une femme, on voit bien que deux femmes ne peuvent passer, puisqu'il n'y en a qu'une; un homme aussi avec sa femme ne peut passer (car étant passé il se treuverait seul avec les trois femmes); donc, il faut que deux hommes passent et allent vers leurs deux femmes, laissant l'autre avec la sienne. Or, qui ramènera le bateau?

« Un homme ne peut le faire (car il lairrait sa femme accompagnée d'un autre homme); une femme (*ou deux femmes*) [1] ne

[1] Les mots en italique ne sont pas dans Bachet; c'est un oubli.

peut aussi (car elle irait vers un autre homme en laissant son mari); que si les deux hommes le ramenaient, ce serait ne rien faire, car ils retourneraient là d'où ils sont venus. Partant, ne restant autre moyen, il faut qu'un homme avec sa femme ramène le bateau.

« *Au quatrième passage,* où restent à passer deux hommes avec leurs deux femmes, il est certain qu'un homme avec sa femme ne doit passer (car ce serait ne rien faire); les deux femmes aussi ne peuvent passer (car alors les trois femmes seraient avec un seul homme); donc il faut que les deux hommes passent. Alors pour ramener le bateau, deux hommes ne peuvent être employés (car ce serait retourner là d'où ils sont venus); un homme seul aussi ne peut (car, cela fait, il se treuverait seul avec deux femmes); donc il faut que ce soit la femme qui, en deux fois, aille quérir les deux autres femmes qui restent à passer, et voilà le *cinquième* et le *sixième* passage. Partant, en six fois, ils sont tous passés sans enfreindre la condition (1). »

Le raisonnement qui précède nous montre que le problème proposé ne comporte qu'une seule solution en six passages, au plus.



L'ERREUR DE TARTAGLIA.

Tartaglia, illustre mathématicien italien, naquit à Brescia vers 1510, et mourut en 1559. Il a donné, avant Pascal, la

(1) BACHET, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les Nombres.* Quatrième édition, revue, simplifiée et augmentée par A. LABOSNE. Paris, GAUTHIER-VILLARS, 1879, p. 148-150.

théorie du triangle arithmétique, et avant Cardan, la résolution de l'équation du troisième degré. Dans son *Traité d'Arithmétique*, il s'est proposé de résoudre le problème pour quatre ménages, en conservant les conditions de l'énoncé précédent; mais ce grand savant s'est trompé. Bachet, qui le fait remarquer, a reconnu que la chose est impossible, mais sans donner de démonstration.

Voici comment on peut démontrer l'impossibilité de ce problème, lorsqu'on ne peut faire passer plus de deux personnes à la fois. On observera d'abord que d'un passage au suivant le nombre des personnes passées, s'il augmente, ne peut augmenter que d'une unité. Par conséquent, supposons qu'on ait fait passer deux, puis trois, puis quatre personnes avec les conditions imposées, et voyons si l'on pourra faire passer cinq personnes. Ces cinq personnes peuvent être passées de l'une des quatre façons suivantes :

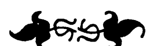
4 femmes.	3 femmes.	2 femmes.	1 femme.
1 homme.	2 hommes.	3 hommes.	4 hommes.

Mais les deux premiers cas sont impossibles, d'après l'énoncé, puisque sur la seconde rive les femmes seraient en majorité, et, par suite, il y aurait quelque femme qui se trouverait avec un homme sans son mari; de même, le troisième cas est impossible, puisque sur la première rive les femmes seraient encore en majorité sur les hommes présents.

Quant au dernier cas, s'il peut avoir lieu, c'est que le dernier passage a amené deux hommes, ou un homme et une femme. Or il n'a pu amener deux hommes, car alors il y aurait eu sur la première rive deux hommes et trois femmes, ce qui est impos-

sible comme dans le second cas; il n'a pu amener non plus un homme et une femme, car il y aurait eu sur la première rive un homme et quatre femmes, ce qui est impossible comme dans le premier cas.

Donc on ne peut faire passer cinq personnes, par suite des exigences de l'énoncé du problème.



LA TRAVERSÉE DE QUATRE MÉNAGES.

Cependant le problème de la traversée de quatre ménages peut être effectué, si le bateau peut contenir jusqu'à trois personnes, en conservant les autres conditions imposées, ainsi que l'a démontré M. Labosne.

Désignons les maris ou les rois des quatre couleurs du jeu de cartes par les grandes lettres A, B, C, D, et les femmes ou les reines respectives, par les petites lettres correspondantes *a*, *b*, *c*, *d*; on a, au départ,

Première rive.				*Deuxième rive.*			
D	C	B	A	.	.	.	.
d	*c*	*b*	*a*	.	.	.	.

En admettant que le bateau puisse contenir jusqu'à trois personnes, on opérera conformément au tableau suivant :

I. — Trois reines passent d'abord :

D	C	B	A	.	.	.	.
d	.	.	.	.	*c*	*b*	*a*

II. — Une reine (ou deux) revient et emmène la quatrième :

D	C	B	A	|	.	.	.	.
.	.	.	.	|	*d*	*c*	*b*	*a*

III. — Une reine revient, reste avec son mari; les trois autres rois passent :

D	.	.	.	|	.	C	B	A
d	.	.	.	|	.	*c*	*b*	*a*

IV. — Un roi revient avec sa femme et emmène l'autre roi :

.	.	.	.	|	D	C	B	A
d	.	.	.	|	.	*c*	*b*	*a*

V. — Enfin le dernier des rois revient chercher sa femme :

.	.	.	.	|	D	C	B	A
.	.	.	.	|	*d*	*c*	*b*	*a*



PROBLÈME GÉNÉRAL DES TRAVERSÉES.

En suivant la même voie, on généralise le problème précédent que l'on peut énoncer ainsi :

Des maris en nombre quelconque n se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière et aperçoivent un bateau sans batelier; ce bateau ne peut porter plus de $(n - 1)$ personnes. On demande comment ces $2n$ personnes passeront, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure en la compagnie d'un autre homme, ou de plusieurs autres, si son mari n'est présent.

Pour la solution de ce problème, nous supposerons qu'il y a plus de quatre ménages; nous désignerons

les maris par les lettres M L —— B A,
et leurs femmes par *m l* —— *b a*.

Les deux traits horizontaux représentent un ou plusieurs ménages, en nombre quelconque.

On a, au départ :

Première rive.			*Deuxième rive.*		
M L	——	B A	. .	. . .	. .
m l	——	*b a*	. .	. . .	. .

On opérera conformément au tableau suivant :

I. — D'abord $(n - 1)$ femmes passent :

M L	——	B A	. .	. . .	. .
m .	. . .	. .	. *l*	——	*b a*

II. — Une femme revient chercher la dernière :

M L	——	B A	. .	. . .	. .
. .	. . .	. .	*m l*	——	*b a*

III. — Une femme revient, reste avec son mari, et les autres maris passent :

M .	. . .	. .	. L	——	B A
m .	. . .	. .	. *l*	——	*b a*

IV. — Un couple repasse la rivière et ramène le couple restant :

. .	. . .	. .	M L	——	B A
. .	. . .	. .	*m l*	——	*b a*.

La traversée est effectuée en quatre voyages, tandis que pour quatre ménages il en faut cinq; dans ce cas, le dernier voyage se dédouble, puisqu'il reste quatre personnes sur la première rive, après le troisième passage.



AUTRE GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME.

L'énoncé général qui précède a été proposé par M. Labosne, qui a donné une solution de ce problème dans son édition des *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet de Méziriac. Mais la solution que nous venons d'exposer est beaucoup plus simple que celle de l'éditeur.

D'ailleurs, nous observerons ici que cette généralisation ne nous semble pas complète; elle ne concorde pas entièrement avec l'idée renfermée dans l'énoncé du problème des trois maris jaloux. D'après le tableau précédent, on voit que l'on peut faire passer neuf ménages avec un bateau contenant huit personnes au plus. Cependant il est facile de voir que cette traversée peut être effectuée avec un bateau contenant deux personnes de moins, c'est-à-dire contenant six personnes au plus. En effet, dans la solution du problème des trois ménages, chacun d'eux peut être considéré comme triple, et la traversée pourra s'effectuer conformément au premier tableau que nous avons donné, en y supposant que A*a*, B*b*, C*c* représentent des triples ménages.

En conséquence, l'énoncé général du problème des traversées de *n* ménages est le suivant :

Des maris en nombre quelconque n se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière; quel doit être le plus petit nombre x de personnes qu'un bateau peut au plus contenir, pour effectuer la traversée, sans batelier, avec la condition qu'aucune femme ne demeure dans le bateau ou sur l'une des rives en compagnie d'un ou de plusieurs hommes, si son mari n'est présent.

Nous donnerons la solution de ce problème dans une note placée à la fin du volume.



LA STATION DANS UNE ILE.

Nous ajouterons, pour terminer cette récréation, qu'il y a une autre manière de généraliser le problème des maris jaloux par une méthode très simple et très ingénieuse, dont l'idée nous a été suggérée au Congrès de l'*Association française pour l'avancement des sciences*, à Montpellier, en 1879, par un jeune élève du lycée de cette ville, M. Cadet de Fontenay. En effet, il suffit de supposer que, dans la traversée du fleuve, on peut s'arrêter dans une île; dans ce cas, en conservant toutes les autres conditions du premier problème, on peut effectuer avec un bateau, contenant deux personnes au plus, la traversée d'un nombre quelconque de ménages. En d'autres termes, nous donnerons la solution complète du problème suivant :

Des maris, en nombre quelconque, se trouvent avec leurs femmes au passage d'une rivière; ils rencontrent un bateau si

petit, qu'il ne peut porter plus de deux personnes. De plus, la rivière renferme une île sur laquelle on peut s'arrêter. On demande comment toutes ces personnes passeront la rivière, de telle sorte qu'aucune femme ne demeure, soit sur les deux rives, dans le bateau ou dans l'île, en la compagnie d'un ou de plusieurs hommes, si son mari n'est présent.

Nous supposerons d'abord que le nombre des maris est au moins égal à quatre. La traversée se composera toujours de trois phases distinctes.

Phase de départ. — Dans cette première partie, il s'agit de faire passer un ménage sur la seconde rive, et un autre dans l'île; on arrive à ce résultat par *cinq* voyages; après chacun d'eux, le bateau est amarré dans l'île.

Les deux traits horizontaux représentent encore un ou plusieurs ménages.

Première rive.	*Ile.*	*Deuxième rive.*

I. — Deux femmes passent dans l'île :

Première rive.	*Ile.*	*Deuxième rive.*
— D C B A	. . . . .	. . . . .
— *d c* . .	. . *b a*	. . . . .

II. — L'une d'elles revient chercher la troisième :

Première rive.	*Ile.*	*Deuxième rive.*
— D C B A	. . . . .	. . . . .
— *d* . . .	. *c b a*	. . . . .

III. — Une femme revient, reste avec son mari, et deux maris rejoignent leurs femmes :

Première rive.	*Ile.*	*Deuxième rive.*
— D C . .	. . B A	. . . . .
— *d c* . .	. . *b a*	. . . . .

IV. — Les femmes de l'île passent sur la deuxième rive, et l'une d'elles revient dans l'île :

— D C . . | . . B A | . . . .
— *d c* . . | . . *b* . | . . . *a*

V. — Les hommes de l'île traversent le second bras, et l'un d'eux revient dans l'île avec sa femme :

— D C . . | . . B . | . . . A
— *d c* . . | . . *b* . | . . . *a*

Phase intermédiaire. — Il s'agit : 1° d'aller chercher un couple sur la première rive pour l'amener dans l'île ; 2° de faire passer un couple de l'île sur la seconde rive, le bateau restant toujours amarré dans l'île après chaque voyage ; cette phase comprend *quatre* voyages.

I. — L'homme de l'île revient sur la première rive et deux femmes rejoignent l'île :

— D C B . | . . . . | . . . A
— . . . . | *d c b* . | . . . *a*

II. — Une femme revient, reste avec son mari, et les deux autres rejoignent leurs femmes dans l'île :

— D . . . | . C B . | . . . A
— *d* . . . | . *c b* . | . . . *a*

III. — Les deux maris traversent le second bras, et la femme revient dans l'île :

— D . . . | . . . . | . C B A
— *d* . . . | . *c b a* | . . . .

IV. — Deux femmes de l'île traversent le second bras, et le mari C revient dans l'île :

— D . . .	. C . .	. . B A
— *d* . . .	. *c* . .	. . *b* *a*

On répètera cette phase intermédiaire jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul ménage sur la première rive.

Dernière phase. — Il s'agit de faire passer sur la deuxième rive le ménage resté sur la première, et celui qui est resté dans l'île. Il faut *trois* voyages, le dernier étant compté pour un seul.

I. — L'homme de l'île revient chercher le dernier mari :

. . . .	D C . .	. . B A —
d . . .	. *c* . .	. . *b* *a* —

II. — Les hommes de l'île passent sur la seconde rive, et une femme revient dans l'île :

. . . .	. . . .	D C B A —
d . . .	. *c* *b* .	. . . *a* —

III. — Les femmes de l'île passent le second bras, et l'une d'elles revient chercher la dernière femme :

. . . .	. . . .	D C B A —
. . . .	. . . .	*d* *c* *b* *a* —

Donc, s'il n'y a que quatre ménages, la traversée s'effectue en douze passages; et s'il y a n ménages, elle peut s'effectuer en un nombre de voyages au plus égal à $4(n-1)$.



DEUXIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DES PONTS ET DES ILES.

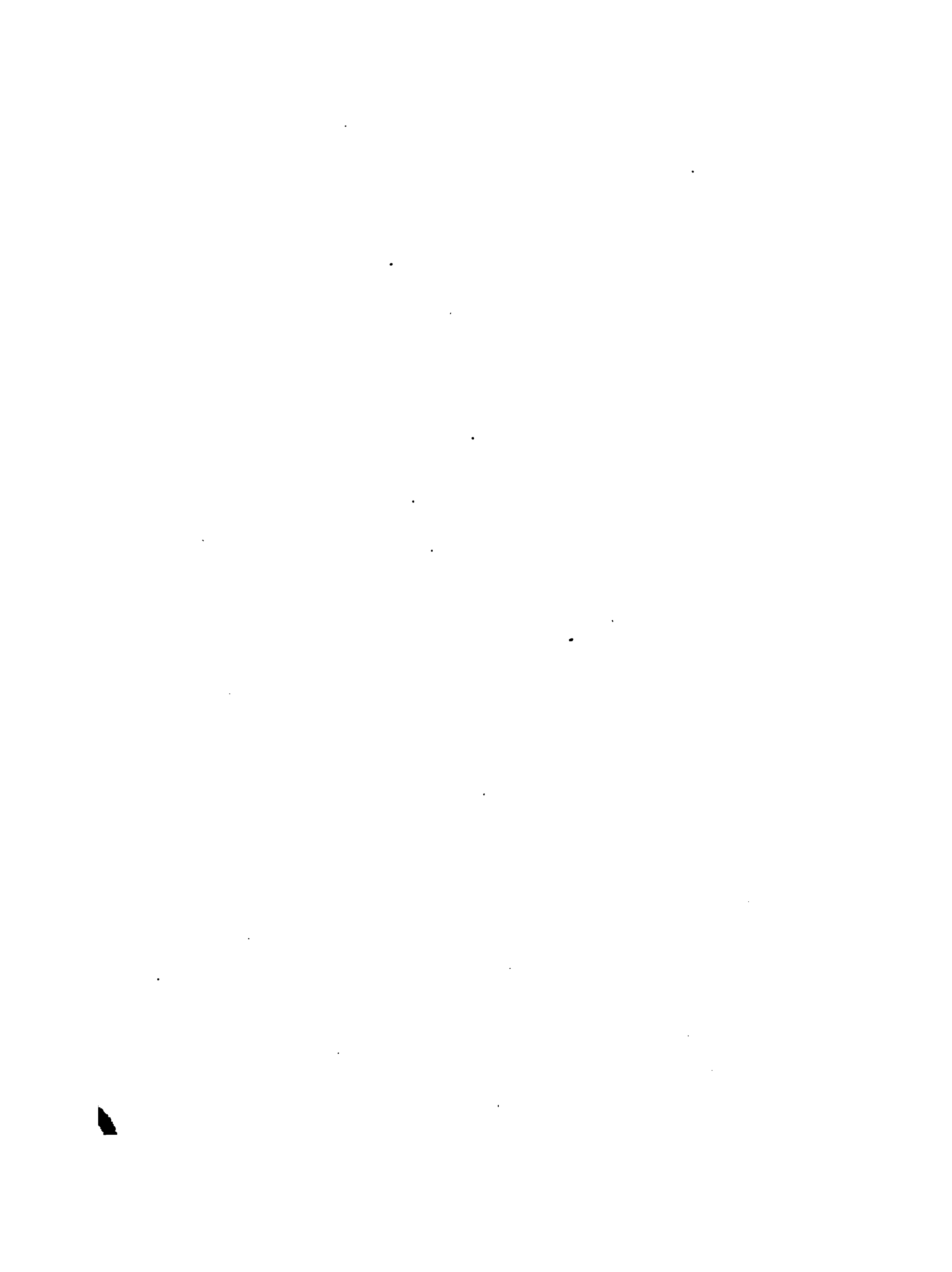
A Monsieur Édouard Collignon, inspecteur général des Ponts et Chaussées.

« Il est des esprits de toutes les trempes, comme des caractères et des visages différents. Ce qu'un ordre d'hommes honore d'une profonde indifférence, d'autres en font leurs délices. C'est en cela que consiste l'harmonie de l'univers. »

(OZANAM. — Préface des *Récréations.*)

« Quand le pont est passé, on se mocque du sainct. »

(*Proverbe du moyen âge.*)





DEUXIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DES PONTS ET DES ILES.

PARMI les divers travaux des mathématiciens sur cette branche de la science de l'étendue que l'on nomme *Géométrie de situation*, on rencontre, dès l'origine, un fameux Mémoire d'Euler, connu sous le nom de *Problème des Ponts de Kœnigs berg;* nous donnons ci-dessous, d'après la traduction de M. C. Henry, un commentaire de cet opuscule, qui a paru en latin dans les *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin* pour l'année 1759, et qui a pour titre : *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis.*



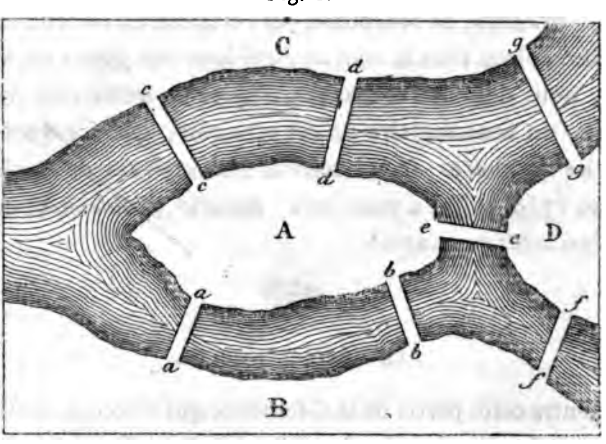
LE MÉMOIRE D'EULER.

1° Outre cette partie de la Géométrie qui s'occupe de la grandeur et de la mesure, et qui a été cultivée dès les temps les plus reculés, avec une grande application, Leibniz a fait mention, pour la première fois, d'une autre partie encore très inconnue actuellement, qu'il a appelée *Geometria situs*. D'après lui, cette branche

de la science s'occupe uniquement de l'ordre et de la situation, indépendamment des rapports de grandeur. Mais quels sont les problèmes qui appartiennent à cette géométrie ; quelles sont les méthodes qu'il faut employer à leur résolution ? C'est ce qui n'a pas encore été nettement défini. Récemment j'ai entendu parler d'un problème qui paraît se rapporter à la Géométrie de situation, puisqu'il ne contient, dans son énoncé, que des considérations d'ordre et non de mesure ; aussi ai-je résolu d'exposer ici, comme un spécimen, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre ce problème.

2° A Kœnigsberg, en Poméranie, il y a une île appelée *Kneiphof;* le fleuve qui l'entoure se divise en deux bras (*fig.* 1), sur les-

Fig. 1.



Les ponts de Kœnigsberg en 1759.

quels sont jetés les sept ponts *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Cela posé, peut-on arranger son parcours de telle sorte que l'on passe sur chaque

pont, et que l'on ne puisse y passer qu'une seule fois? Cela semble possible, disent les uns; impossible, disent les autres; cependant personne n'a la certitude de son sentiment. Je me suis donc proposé le problème suivant, qui est très général :

Quelle que soit la forme d'un fleuve, sa distribution en bras, par des îles en nombre quelconque, et quel que soit le nombre des ponts jetés sur le fleuve, trouver si l'on peut franchir celui-ci en passant une fois, et une seule, sur chacun des ponts.

3° Quant au problème particulier des sept ponts de Kœnigsberg, on pourrait évidemment le résoudre en faisant l'énumération complète de tous les parcours possibles; on reconnaîtrait ainsi s'il existe ou non un chemin qui réponde à la question. Mais, par suite du grand nombre de permutations, cette méthode, déjà difficile et laborieuse dans le cas particulier, serait impraticable pour un plus grand nombre de ponts; d'autre part, parmi ces permutations, beaucoup d'entre elles sont inutiles, de telle sorte qu'après avoir terminé l'opération on aurait rencontré un grand nombre de choses qui ne sont pas en question; c'est en cela, sans aucun doute, que réside la cause d'une aussi grande difficulté (¹). Donc, en laissant de côté ces considérations, j'ai recherché s'il n'était pas préférable d'imaginer une méthode qui permît de juger, au premier abord, de la possibilité ou de l'impossibilité du problème; je pensais, en effet, qu'une telle méthode devait être beaucoup plus simple (²).

(¹) C'est pour la même raison, très probablement, que l'on n'a pas encore trouvé la solution du problème des reines lorsque le nombre de celles-ci dépasse huit; voir à ce sujet notre quatrième récréation sur le problème des huit reines au jeu des échecs. Quant aux permutations qu'il y aurait lieu de considérer ici, ce sont les permutations avec répétition.

(²) Cette remarque d'Euler comporte un très grand caractère de généralité qu'elle ne paraît pas avoir tout d'abord. J'ai observé que, dans un grand nombre



4° Or, toute la méthode repose sur une manière convenable de représenter les divers chemins; pour cela, je me sers des lettres majuscules A, B, C, D, ... pour désigner les diverses régions séparées par les bras du fleuve; alors, si l'on passe de la région A dans la région B, soit par le pont *a*, soit par le pont *b*, je désigne ce chemin par AB; la première lettre indique la région de départ, et la seconde la région d'arrivée. Maintenant, si le voyageur passe de la région B dans la région D, par le pont *f* par exemple, je désigne la seconde traversée par BD, et l'ensemble des deux passages successifs par ABD; ainsi, la lettre intermédiaire B désigne en même temps la région d'arrivée après la première traversée, et la région de départ pour la seconde.

5° Si le voyageur passe ensuite de D en C par le pont *g*, je désigne l'ensemble des trois passages successifs par les quatre lettres ABDC. Ainsi, la *notation* ABDC signifie que le voyageur, situé primitivement dans la région A, est parvenu dans la région C, après avoir occupé successivement les régions B et D; mais, puisque ces quatre régions sont séparées les unes des autres par le bras du fleuve, le voyageur a dû franchir trois ponts; de même, tout parcours dans lequel on traverse quatre ponts sera désigné par cinq lettres. En général, si le voyageur traverse n ponts, la notation de son parcours contiendra $n+1$ lettres. Ainsi,

de problèmes de la Géométrie de situation, il y a souvent une différence considérable dans la manière de traiter la possibilité et l'impossibilité; en général, l'impossibilité se manifeste plus facilement que la possibilité, ainsi que l'on pourra s'en convaincre dans les théories du solitaire, du taquin et de quelques autres jeux. Dans le paragraphe suivant, Euler ajoute que toute sa méthode repose sur une notation spéciale; nous ferons voir encore que dans tous ces problèmes il en est toujours ainsi. On verra, dans notre récréation sur le jeu de baguenaudier, comment la notation si ingénieuse de M. Gros simplifie considérablement la théorie de ce jeu.

dans le problème des sept ponts de Kœnigsberg, tout chemin possible doit être désigné par huit lettres.

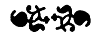
6° On observera que, dans cette notation, il n'est pas tenu compte de la désignation des ponts par lesquels le passage s'effectue; il est évident, en effet, que les ponts qui réunissent les mêmes régions peuvent être, dans chaque parcours, remplacés les uns par les autres. Par conséquent, dans le problème des sept ponts, tout parcours est représenté par huit lettres; mais, de plus, ces huit lettres doivent être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B, dans l'ordre AB ou BA, se présente deux fois, puisqu'il y a deux ponts qui réunissent les rives des régions A et B; de même, le voisinage des lettres A et C doit aussi apparaître deux fois; pour la même raison, il est nécessaire que les lettres B et D, ou C et D soient voisines une seule fois.

7° Le problème particulier se réduit donc à former avec les quatre lettres A, B, C, D une série de huit lettres, dans laquelle tous ces voisinages apparaissent autant de fois qu'il a été indiqué; mais, avant de chercher à effectuer une telle disposition, il est bon de se demander si celle-ci est réalisable. En effet, si l'on démontrait, et c'est ce qui a lieu ici, qu'un tel assemblage de lettres est impossible, il serait inutile de continuer. Aussi ai-je trouvé une règle qui donne, pour tous les cas, la condition indispensable pour que le problème des ponts et des îles ne soit pas impossible.

8° Pour cela, je considère uniquement la région A, dont la rive est réunie à celle des autres régions par un nombre quelconque de ponts *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ... En commençant par le pont *a*, j'observe que si le voyageur traverse ce pont, ou bien le voya-

geur se trouvait en A avant le passage, ou s'y trouvera après; par conséquent, en franchissant le pont *a* dans un sens ou dans l'autre, la lettre A paraîtra une seule fois dans la notation. Supposons maintenant que trois ponts *a*, *b*, *c* conduisent dans la région A; si le voyageur traverse les trois ponts, la lettre A apparaîtra deux fois dans la notation, soit qu'au début le voyageur parte de cette région ou d'une autre quelconque. De même, si cinq ponts conduisent en A, la lettre A sera comprise trois fois dans la notation du passage à travers tous ces ponts. En général, si le nombre des ponts qui aboutissent à la rive de la région A est impair (une telle région sera appelée ***région impaire***), la lettre A apparaîtra, dans la notation du passage complet, un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité. En d'autres termes, si le nombre des ponts est $2n+1$, le nombre d'apparitions de A sera la moitié de $2n+2$ ou $n+1$.

9° Dans le cas du problème de Kœnigsberg, cinq ponts aboutissent à la région A, et trois ponts à chacune des régions B, C, D; donc, dans la notation du parcours complet, la lettre A doit apparaître trois fois, et chacune des lettres B, C, D doit être écrite deux fois; par conséquent cette notation devrait renfermer neuf lettres, et non huit, ainsi que nous l'avions trouvé par d'autres considérations. Ainsi le problème de franchir une seule fois tous les ponts de Kœnigsberg n'est pas possible.



10° On appliquera exactement le même raisonnement pour tous les cas dans lesquels le nombre des ponts qui aboutissent aux différentes régions est toujours impair; on pourra déterminer

des cas d'impossibilité du parcours. En effet, s'il arrive que le nombre total des apparitions de toutes les lettres n'égale pas le nombre de tous les ponts augmenté de l'unité, le problème est alors impossible. On observera que la règle donnée pour obtenir le nombre des répétitions de la lettre A par le nombre impair des ponts de la région s'applique toujours, soit que tous les ponts issus de la rive A aboutissent à une seule région B, soit qu'ils aboutissent à un nombre quelconque de régions.

11° Mais, lorsque le nombre des ponts issus de A est pair, on doit considérer deux cas, suivant que le voyageur est parti de A ou d'une autre région. En effet, si deux ponts conduisent en A, et si le voyageur est parti de A, alors la lettre A doit être répétée deux fois : une première fois pour le départ par l'un des ponts, et une deuxième fois pour le retour par l'autre pont; mais si le voyageur a commencé ses pérégrinations par une autre région, la lettre A ne se trouvera écrite qu'une seule fois et désignera tout aussi bien, ainsi qu'il est convenu, l'arrivée en A par l'un des ponts et le départ par l'autre.

12° Supposons que quatre ponts conduisent dans la région A, et que le voyageur parte de celle-ci; alors la notation du parcours contiendra trois fois la lettre A s'il passe une fois, et une seule, sur chacun de ces ponts; mais s'il est parti d'une autre région, la lettre A ne sera répétée que deux fois. De même, lorsque six ponts aboutissent à la région A, la notation du parcours renfermera quatre fois ou trois fois la lettre A, suivant que le départ s'est effectué de la région A ou d'une autre. En général, lorsque le nombre des ponts d'une rive est pair (*région paire*), la notation correspondante renferme la lettre de cette région un nombre de fois égal à la moitié du nombre des ponts, si le départ s'est établi

d'une autre région, et à ce nombre augmenté de l'unité, si le commencement du voyage a eu lieu dans cette région.

13° Mais il est évident que, dans le parcours complet, on ne peut partir que d'une seule région; par conséquent je prendrai toujours pour le nombre des répétitions d'une lettre la moitié du nombre des ponts pour une région paire, et la moitié du nombre des ponts augmenté d'une unité, si la région est impaire. Nous aurons alors deux cas à considérer, suivant que le départ s'effectue d'une région impaire ou d'une région paire.

Dans le premier cas, le problème sera impossible si le nombre total des répétitions des lettres ne surpasse pas d'une unité le nombre total des ponts. Dans le cas de départ d'une région paire, le problème sera impossible, si le nombre total des répétitions des lettres n'égale pas le nombre des ponts; car, en commençant par une région paire, on devra augmenter d'une unité pour cette région, et pour celle-là seulement, le nombre des répétitions de la lettre correspondante.

14° Considérons donc une disposition quelconque des ponts et des îles d'un fleuve. Pour savoir si le parcours complet de tous les ponts n'est pas impossible *à priori*, on opère de la manière suivante : 1° On désigne chacune des régions séparées les unes des autres par les lettres A, B, C, D; 2° on prend le nombre de tous les ponts, et on le place en tête du tableau de calcul que nous allons indiquer; 3° on écrit dans une colonne verticale chacune des lettres A, B, C, D, et dans une seconde colonne, le nombre des ponts qui aboutissent à ces différentes régions; 4° on

marque d'un astérisque les régions paires, c'est-à-dire celles auxquelles aboutissent des ponts en nombre pair; 5° on écrit dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, et les moitiés des nombres impairs, augmentés d'une unité, de la colonne précédente; 6° on fait la somme de tous les nombres de cette dernière colonne. Lorsque cette somme est égale au nombre de tous les ponts ou lui est inférieure d'une unité, le passage complet peut être effectué, sinon le problème est impossible. Mais il faut observer que, dans le second cas, le départ doit commencer par une région paire, marquée d'un astérisque; dans le premier cas, le départ doit s'effectuer d'une région non marquée d'astérisque, ou impaire. Ainsi l'on a, pour le problème de Kœnigsberg :

Nombre des ponts : 7.

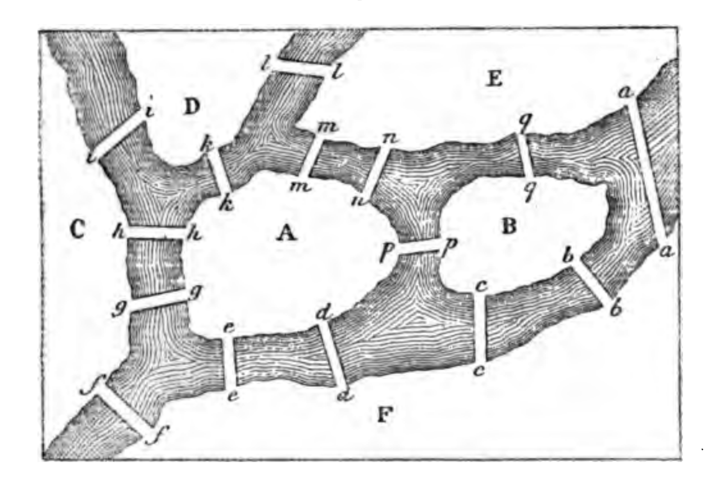
A................	5	3
B................	3	2
C................	3	2
D................	3	2
TOTAL..............		9.

Comme le total est plus grand que 8 ou 7 + 1, le problème est impossible.

15° Considérons la disposition formée par deux îles A et B, réunies entre elles et aux rives d'un fleuve par quinze ponts, ainsi que l'indique la *fig.* 2. On demande si l'on peut voyager de manière à passer sur tous les ponts, sans jamais repasser

sur l'un deux. D'abord, je désigne les six régions par les

Fig. 2.



lettres A, B, C, D, E, F; puis je construis le tableau d'après les explications données ci-dessus :

Nombre des ponts : 15.

A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
TOTAL		16

Dans cet exemple, le problème est possible, pourvu que l'on

parte de la région D, et alors on arrive à la région E, ou inversement; le parcours pourra s'effectuer ainsi :

E*a*F*b*B*c*F*d*A*e*F*f*C*g*A*h*C*i*D*k*A*m*E*n*A*p*B*q*E*l*D,

ou dans l'ordre inverse; dans cette notation, nous avons intercalé entre les lettres majuscules, qui indiquent les régions, les lettres minuscules qui désignent les quinze ponts.



16° En dehors de la méthode précédente, pour juger de l'impossibilité, nous indiquerons un moyen plus simple et plus expéditif. Nous observerons d'abord que la somme des nombres de la seconde colonne verticale du tableau est exactement égale au double du nombre des ponts ; cela tient à ce que nous avons compté chaque pont deux fois, puisque par chacune de ses extrémités il aboutit à deux régions distinctes.

17° Il résulte évidemment de cette remarque, que la somme des nombres renfermés dans la seconde colonne verticale est un nombre pair, puisque sa moitié représente le nombre des ponts.

Par conséquent, il n'est pas possible que le nombre des régions impaires soit un, trois, cinq, etc. ; ainsi dans tous les tableaux de calcul, la seconde colonne renferme toujours un nombre pair de nombres impairs; en d'autres termes, le nombre des régions impaires est nécessairement zéro ou un nombre pair. C'est, en particulier, ce que nous avons trouvé pour le problème de Kœnigsberg, et aussi pour le problème du n° 15.

18° Il ressort de ces considérations que le problème n'est pas impossible si toutes les régions sont paires. Alors tous les nombres de la seconde colonne verticale sont pairs, et le total des

nombres de la troisième colonne est égal au nombre des ponts; et l'on verra que le problème est toujours possible en prenant pour point de départ une région quelconque.

Ainsi, dans l'exemple de Kœnigsberg, on pourrait franchir tous les ponts par deux fois; par exemple :

a b a b c d c d e f f g g e.

En effet, chaque pont est dédoublé, et toutes les régions deviennent paires ([1]).

19° Supposons encore qu'il y ait deux régions impaires, toutes les autres étant paires; dans ce cas, la somme des nombres de la troisième colonne surpasse d'une unité le nombre des ponts; on s'assurera encore que le problème est possible, à la condition de prendre pour point de départ ou d'arrivée l'une ou l'autre des deux régions impaires. On voit encore que si le nombre des régions impaires était de quatre, six, huit, la somme des nombres de la troisième colonne surpasserait de deux, trois, quatre unités le nombre total des ponts; par conséquent le problème serait impossible.

20° *En résumé*, étant donnée une disposition quelconque, il sera facile de savoir s'il est possible de franchir, une seule fois, tous les ponts. Le problème est impossible, lorsqu'il y a plus de deux régions impaires; il est possible : 1° lorsque toutes les régions sont paires, et alors le point de départ peut se faire arbitrairement d'une région quelconque; 2° lorsqu'il n'y a que deux régions impaires, et alors le parcours commence par l'une de celles-ci et finit par l'autre, ou inversement.

([1]) Ce raisonnement s'applique évidemment à une distribution quelconque des ponts et des îles dans les bras d'un fleuve, à la condition de passer deux fois sur chaque pont.

21° Lorsque l'on a conclu à la possibilité du problème, il reste à résoudre la question de savoir comment on doit diriger sa course; à cet effet, je me sers de la règle suivante : « On supprime par la pensée, autant de fois qu'on le peut, les couples de ponts qui conduisent d'une région dans une autre; de cette manière, le nombre des ponts est considérablement diminué; on cherche ensuite la course à effectuer avec le reste des ponts. Cela fait, on rétablit les ponts supprimés, ce qui devient très facile avec un peu d'attention. Aussi je ne crois pas qu'il soit nécessaire d'en dire davantage sur la loi de formation des parcours. »

Ici se termine le Mémoire d'Euler. Cet illustre géomètre n'a traité pour ainsi dire que la question d'impossibilité. On trouvera dans la Note II, placée à la fin du volume, la théorie de la possibilité, que l'on doit considérer comme la suite du Mémoire qui précède.



LES PONTS DE PARIS EN 1880.

Nous ferons maintenant l'application des règles démontrées dans ce Mémoire au problème suivant : *Est-il possible de passer successivement sur tous les ponts de Paris sans passer deux fois sur l'un d'eux?*

Nous ne comprenons dans ce problème que les ponts jetés sur la Seine, sans tenir compte des canaux. Dans le parcours du fleuve à travers Paris, on ne rencontre que trois îles, à savoir : l'île Saint-Louis, la Cité et l'île des Cygnes. Par conséquent on doit compter cinq régions différentes : les deux rives et les trois îles.

Mais, parmi ces cinq régions, l'île des Cygnes et la Cité sont des régions paires; à la première aboutissent les deux parties du pont de Grenelle; à la Cité aboutissent dix ponts, savoir : 1° au sud, le pont de l'Archevêché, le pont au Double, le Petit-Pont, le pont Saint-Michel et la partie méridionale du Pont-Neuf; 2° au nord, le pont Saint-Louis, le pont d'Arcole, le pont Notre-Dame, le pont au Change et la partie septentrionale du Pont-Neuf. L'île Saint-Louis est une région impaire à laquelle aboutissent sept ponts : au sud, la partie méridionale du pont Sully, le pont de la Tournelle et le pont Saint-Louis; au nord, la partie septentrionale du pont Sully, le pont Marie et le pont Louis-Philippe; mais il faut ajouter l'*Estacade,* pont en bois qui aboutit à la rive droite. Quant aux deux rives, il n'est pas nécessaire de connaître le nombre des ponts; il est facile de voir que l'une d'elles est une région impaire et l'autre une région paire. En effet, il a été démontré au n° 17 que le nombre des régions impaires est toujours pair; or, sur les cinq régions, deux sont paires et une impaire; il est donc nécessaire que l'une des rives soit le point de départ d'un nombre impair de ponts.

D'autre part, puisqu'il n'y a que deux régions impaires, le problème proposé est toujours possible. En d'autres termes, un voyageur peut disposer son parcours de telle sorte qu'il puisse passer une fois, et une seule, sur tous les ponts qui aboutissent à la Cité et à l'île Saint-Louis et sur un nombre quelconque de ponts joignant directement les deux rives de la Seine. Mais le promeneur est toujours forcé de prendre l'île Saint-Louis pour point de départ ou d'arrivée.

On observera d'ailleurs que si l'on ne tient pas compte de l'*Estacade,* le problème devient d'une très grande simplicité.

LES FIGURES D'UN SEUL TRAIT. — LA SIGNATURE DE MAHOMET.

On se propose quelquefois de dessiner, d'un seul trait non doublé, la figure formée par les quatre côtés d'un rectangle et ses deux diagonales. Ce problème est semblable à celui des ponts de Kœnigsberg; soient A, B, C, D les sommets du rectangle, E l'intersection des diagonales. On peut considérer les cinq points A, B, C, D, E comme les centres de cinq régions; quatre d'entre elles, A, B, C, D, sont impaires; donc le problème est impossible. Cependant on pourrait dessiner cette figure en doublant tous les traits.

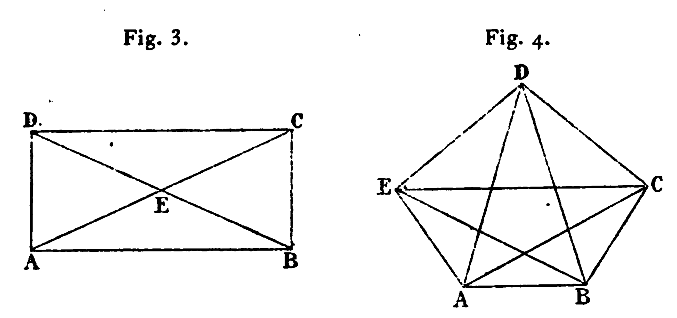


Fig. 3. Fig. 4.

Ces considérations s'appliquent à la description par un seul trait de toutes les figures de Géométrie formées de lignes droites ou courbes, dans le plan ou dans l'espace. Ainsi on démontrera très facilement que l'on peut décrire d'un seul trait la figure formée par les côtés et toutes les diagonales d'un polygone convexe d'un nombre impair de côtés, et que le problème est impossible pour les polygones d'ordre pair, comme le carré, l'hexagone. De même, on peut décrire d'un seul trait l'ensemble des arêtes de

l'octaèdre régulier, tandis qu'on ne peut le faire pour les quatre autres polyèdres réguliers convexes.

Je me suis laissé dire que Mahomet dessinait d'un seul coup, avec la pointe de son cimeterre, sa signature formée de deux croissants opposés, conformément à la *fig*. 5. En effet, cette

Fig. 5.

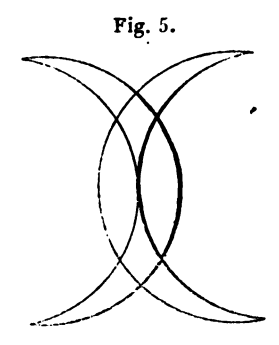
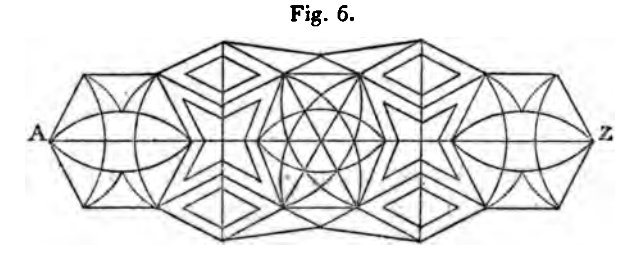


figure ne contient que des points d'ordre pair, et peut se décrire d'un seul trait continu.

Fig. 6.

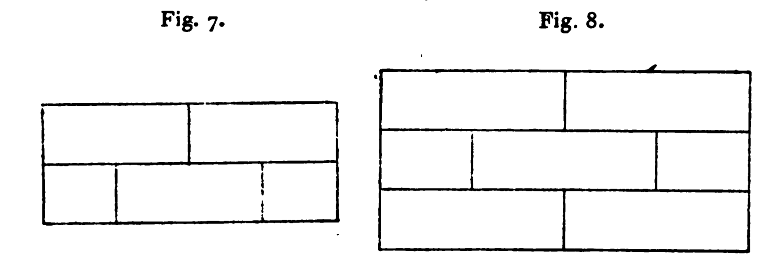


La *fig*. 6 ne contient que deux points impairs A et Z; par conséquent, on peut la décrire d'un seul trait continu allant de A à Z ou inversement. On peut réaliser un jeu, en dessinant cette figure en grand sur une feuille de carton; on place de petits jetons sur le milieu de toutes les lignes qui joignent deux points

voisins; il s'agit alors de déterminer le parcours à suivre pour enlever tous les jetons successivement. Cette figure est extraite de l'opuscule ayant pour titre : *Vorstudien zur Topologie*, par Johann Benedict Listing; cet ouvrage curieux m'a été gracieusement communiqué par M. Moritz Cantor, professeur à l'Université de Heidelberg.

La *fig.* 7 contient huit points impairs et ne peut être décrite en moins de quatre traits continus; ce théorème a été énoncé par

Fig. 7. Fig. 8.



Clausen, dans le n° 494 des *Astronomische Nachrichten.* La *fig.* 8 représente un fragment de mur en maçonnerie; elle contient douze points impairs, et ne peut être décrite en moins de six traits continus.

De même, la figure qui représente l'échiquier ordinaire de soixante-quatre cases renferme vingt-huit points impairs, et ne peut être décrite en moins de quatorze traits; la figure du damier de cent cases nécessite la succession de dix-huit traits continus.

Si l'on divise les côtés d'un triangle en *n* parties égales, et si l'on joint les points de division correspondants par des lignes parallèles aux côtés, on obtient une figure qui ne contient que

des points d'ordre pair, et que l'on peut décrire d'un seul trait, etc.



LES VOYAGES D'UN CONTREBANDIER.

On ramène encore au problème des ponts de Kœnigsberg celui du voyage d'un contrebandier qui se propose de traverser successivement toutes les frontières respectives des divers pays d'un continent, et de ne les traverser qu'une seule fois. Il est évident que les divers pays et leurs frontières correspondent exactement aux régions et aux bras du fleuve sur lesquels serait jeté un seul pont, pour chaque frontière commune à deux pays. Ainsi, puisque la Suède, l'Espagne et le Danemark ont des frontières en nombre impair, il est impossible de traverser, une seule fois seulement, toutes les frontières des différents pays de l'Europe.

Il y a encore lieu de considérer le problème géométrique corrélatif pour les figures du plan et de l'espace. Ainsi, par un mouvement continu sur la surface, il est possible de traverser une seule fois toutes les arêtes du cube, mais non pas les arêtes des autres polygones réguliers convexes.



TROISIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DES LABYRINTHES.

A Monsieur le prince Camille de Polignac, vice-président de la Société mathématique de France.

« Il est rare que les géomètres soient fins, et que les fins soient géomètres. »

(PASCAL. — *Pensées.*)

« Cet esprit philosophique qui doit dominer partout, et qui est le fil de tous les labyrinthes. »

(VOLTAIRE. — *Éloge de la Marq. du Châtelet.*)

« Les hommes d'esprit ne sont pas rares, et les géomètres le sont. »

(CASANOVA DE SEINGALT. — *Solution du problème déliaque.*)



TROISIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DES LABYRINTHES.

LE PETIT POUCET. — LE FIL D'ARIANE.

Lecteur, supposez-vous égaré dans les carrefours d'un labyrinthe, dans les galeries d'une mine, dans les carrières des catacombes, sous les allées ombreuses d'une forêt. Vous n'avez point dans votre main le *Fil d'Ariane,* et vous êtes dans la situation du *Petit Poucet,* après que les oiseaux ont mangé les miettes de pain semées sur sa route. Que faire pour retrouver l'issue du labyrinthe, le puits de la mine, l'entrée des catacombes, la cabane du bûcheron? Cette récréation va vous apprendre que l'on peut toujours retrouver le chemin perdu.



LES LABYRINTHES DE L'ÉGYPTE ET DE LA GRÈCE.

Les anciens auteurs considéraient les labyrinthes comme inextricables; c'est peut-être encore un préjugé de nos jours. On

donnait ce nom à des édifices composés d'allées ou de galeries dont les innombrables ramifications mettaient le visiteur dans l'impossibilité de sortir. Les ouvrages de l'antiquité sont pleins de descriptions de ces monuments merveilleux qui servaient de tombeaux, et dont il ne reste presque plus de trace aujourd'hui. En Égypte, il y en avait deux : le *labyrinthe de Mendès*, situé dans l'île du lac Mœris, et celui des *Douze Seigneurs,* construit au sud-est du même lac, par Psammetichus, près de sept siècles avant l'ère chrétienne. Pline rapporte que c'était un monument consacré au Soleil; il se composait d'une série de temples reliés ou superposés les uns aux autres, occupant une étendue prodigieuse; les rues formaient des circuits et des détours inextricables.

Mais, de tous ces monuments, celui qui a été le plus chanté par les poètes, est le *labyrinthe de Crète*, construit par ordre du roi Minos, pour servir de prison au Minotaure :

Minos veut que dans l'ombre un vaste labyrinthe,
Prison du monstre affreux, le cache en son enceinte.
L'ingénieur Dédale, architecte fameux,
Traça les fondements de ses murs sinueux,
Et, dans de longs détours, sans terme et sans issue,
Par l'erreur des sentiers embarrassa la vue.
Tel qu'amoureux de suivre un tortueux chemin,
Le méandre se joue en son cours incertain,
Et vingt fois sur ses pas ramené dans sa course,
Se rencontre lui-même et retrouve sa source,
De détours en détours sur sa route égaré:
D'innombrables circuits par Dédale entouré,
Tel est le labyrinthe, et l'inventeur lui-même
Put à peine en sortir, tant son art est extrême!

(Ovide, *Métamorphoses*, liv. VIII.)

L'idée d'*inextricabilité* apparaît dans ce passage d'Ovide, dont la traduction possède au moins le mérite de donner, dans le

nombre des épithètes, une image de la multiplicité des carrefours du labyrinthe. On retrouve encore cette idée dans les *Lettres à Émilie* par Demoustier : « Cet édifice immense, dit-il, contenait une infinité de circuits ménagés avec une adresse perfide :

> Hélas! il ressemblait au cœur de l'infidèle,
> Dont l'innocence ignore les détours;
> Sans le savoir, on s'engageait comme elle,
> On se perdait comme elle pour toujours.

Peut-être n'y a-t-il dans tout cela qu'une légende poétique; aucun auteur de l'antiquité ne dit avoir vu ce labyrinthe; du temps de Diodore et de Pline, on n'en découvrait plus de vestiges extérieurs. Cependant il existe encore dans l'île de Crète (aujourd'hui Candie) plusieurs cavernes à galeries couvertes que les Candiotes n'hésitent pas à reconnaître pour les débris du labyrinthe où s'engagea la belle Ariane, fille de Minos.



TOURNEFORT DANS UNE CAVERNE.

Le célèbre botaniste Tournefort visita, vers 1702, l'une de ces cavernes, creusée au pied du mont Ida. Dans ses lettres au ministre Pontchartrain, publiées sous le titre de *Voyage du Levant,* il raconte qu'après avoir erré quelque temps à travers un réseau de corridors souterrains, les explorateurs arrivèrent à une grande et large avenue qui les conduisit à une fort belle salle, située au fond du labyrinthe. « Nous fîmes, dit-il, en une demi-heure de temps 1460 pas dans cette principale allée sans nous écarter ni à droite ni à gauche. Elle est haute de sept pieds, lambrissée d'une couche horizontale de rochers et toute plate,

comme le sont la plupart des lits de pierre de ce quartier-là. Il y a pourtant quelques endroits où il faut un peu baisser la tête, et un, entre les autres, que l'on rencontre vers le milieu du chemin, où l'on est obligé, comme on dit, de *marcher à quatre pattes*. Cette allée est ordinairement assez large pour laisser passer deux ou trois personnes de front. Le pavé est uni; il ne faut ni monter, ni descendre considérablement. Les murailles sont taillées à plomb, ou faites des pierres qui embarrassaient le chemin, et que l'on a pris la peine de ranger fort proprement, comme on fait celles des murailles où l'on n'emploie point de mortier; mais il se présente tant de chemins de tous côtés, que l'on s'y perdrait indubitablement sans les précautions nécessaires. Comme nous avions grande envie d'en revenir, nous postâmes : 1° un de nos guides à l'entrée de la caverne, avec ordre d'aller chercher du monde au village prochain pour venir nous délivrer, supposé que nous ne fussions pas de retour avant la nuit; 2° chacun de nous portait à la main un flambeau; 3° nous attachions sur la droite des papiers numérotés dans tous les détours qui nous paraissaient difficiles à pouvoir être repris; 4° un de nos Grecs laissait à gauche de petits fagots d'épines dont il avait fait provision, et un autre prenait soin de semer sur le chemin de la paille dont il portait un sac sous le bras. »



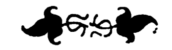
LES AUTRES LABYRINTHES.

Il existe encore des ruines de plusieurs autres labyrinthes : à Lemnos, à Agrigente, à Clusium. On a sur ce dernier édifice, qui servit de sépulture à Porsenna, le témoignage de Marcus

Varron, cité par Pline : Sa base renfermait un labyrinthe inextricable; si quelqu'un s'y engageait sans peloton de fil, il ne pouvait retrouver l'issue. Cet édifice, ajoute Pline, était un monument de la folie et de la vanité humaines.

Au moyen âge, le labyrinthe devient une disposition particulière du pavage des églises gothiques. L'arrangement, la coupe et la couleur des pavés forment, par leurs agencements, des lignes sinueuses conduisant par de nombreux détours à différentes stations, et finalement à un calvaire figuré. Parmi les plus fameux labyrinthes de ce genre, sur lesquels on effectuait des pèlerinages en miniature, on doit citer ceux des cathédrales d'Amiens, de Sens, de Reims, de Chartres, de Bayeux; ces deux derniers subsistent encore, ainsi que celui de la collégiale de Saint-Quentin.

Aujourd'hui nous avons encore à Paris deux labyrinthes, sans compter le dédale de nos rues, de nos boulevards et de nos égouts : celui des anciennes carrières, sous la rive gauche de la Seine, et celui du Jardin des Plantes. Avec une autorisation spéciale, le public peut visiter la partie du premier, que l'on nomme *Ossuaire des Catacombes;* il renferme les débris des sépultures des anciens cimetières. On ne peut s'y égarer, car les visiteurs, comptés à l'entrée et à la sortie, se suivent processionnellement, guidés par une large traînée noire, sorte de fil d'Ariane, que la fumée des bougies a tracée sur la voûte des carrières. Quant au *labyrinthe du Jardin des Plantes,* c'est, aux jours de soleil, un lieu de réunion pour les enfants qui courent et se cachent dans les allées circulaires bordées de sapins et de rocailles, à l'ombre des grands cèdres.



DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DU PROBLÈME DES LABYRINTHES.

Nous pouvons considérer les carrefours d'un labyrinthe comme des points géométriques; les allées, corridors, rues, galeries, comme des lignes droites ou courbes, planes ou gauches, réunissant ces points deux à deux. Nous dirons que ces points et ces lignes forment un réseau géométrique ou un labyrinthe lorsqu'un point mobile placé sur l'une des lignes du réseau peut passer à un autre point quelconque, sans quitter les lignes du système. Cela posé, nous allons démontrer que ce point mobile peut décrire successivement toutes les lignes du réseau, sans saut brusque, et sans passer plus de deux fois sur chacune d'elles. En d'autres termes, *un labyrinthe n'est jamais inextricable.*

Vous réaliserez un jeu de la manière suivante : Choisissez arbitrairement sur une feuille de papier blanc un nombre quelconque de points; joignez-les deux à deux et autant de fois que vous voudrez par un nombre quelconque de lignes, droites ou courbes, de telle sorte qu'aucun point du système ne reste isolé des autres; vous avez ainsi un réseau géométrique. Dessinez, par exemple, le réseau des lignes d'omnibus et de tramways d'une grande ville, le réseau des chemins de fer d'un pays, le réseau des fleuves, des rivières et des canaux d'une contrée quelconque, en y ajoutant, à volonté, les côtes et les frontières.

On recouvre le dessin d'une feuille de carton opaque, de manière à ne pas conserver le souvenir du plan du labyrinthe; cette feuille de carton est percée d'un trou que nous appellerons *oculaire,* et qui permet seulement d'apercevoir une petite fraction du réseau. On déplace le carton ou l'*écran,* de telle sorte

que l'oculaire se trouve placé sur un carrefour A. Il s'agit ensuite de faire parcourir deux fois à l'oculaire toutes les lignes du réseau, d'une manière continue, et de revenir ensuite au point de départ A. Pour conserver le souvenir du passage de l'oculaire sur chacun des chemins qu'il parcourt, on trace sur chaque ligne suivie un petit trait transversal, à l'entrée et à la sortie des carrefours. Par conséquent, les deux extrémités de chaque chemin devront, après les pérégrinations du voyage, avoir été marquées deux fois, mais non davantage.

Dans un labyrinthe effectif, ou dans une galerie de mines, le promeneur égaré déposera une marque, un caillou, à l'entrée et à la sortie de chaque carrefour, dans l'allée qu'il vient de quitter et dans celle qu'il vient de prendre.

SOLUTION DE M. TRÉMAUX.

Parmi les diverses solutions de ce curieux problème de la Géométrie de situation, dont nous venons de donner l'énoncé, nous choisirons, comme la plus simple et la plus élégante, celle qui nous a été gracieusement communiquée par M. Trémaux, ancien élève de l'École Polytechnique, ingénieur des télégraphes; mais nous en avons modifié légèrement la démonstration.

PREMIÈRE RÈGLE. — En partant du carrefour initial, on suit une voie quelconque, jusqu'à ce que l'on arrive à une impasse ou à un nouveau carrefour: 1° si le chemin qu'on a suivi aboutit à une impasse, on revient sur ses pas, et l'on peut alors considérer le chemin parcouru comme supprimé, puisqu'il a été traversé deux fois; 2° si le chemin aboutit à un carrefour, on prend

une voie quelconque, au hasard, en ayant soin de marquer d'un trait transversal la voie d'arrivée dans le sens de la flèche *f*, et la voie de départ dans le sens de la flèche *g* (*fig*. 9). Dans cette figure et dans les trois suivantes, nous avons distingué les anciennes marques des nouvelles, en surmontant celles-ci d'une petite croix.

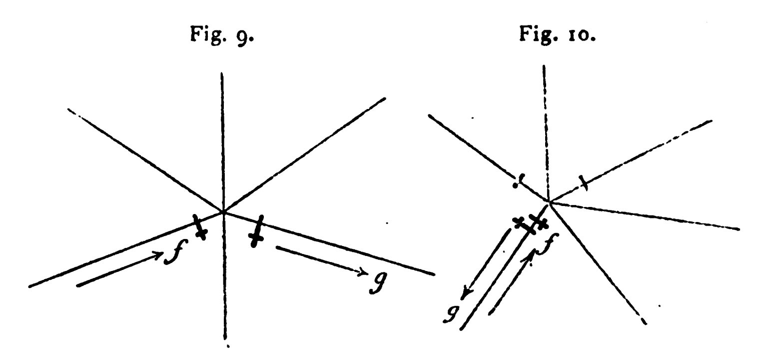


Fig. 9. Fig. 10.

On continue l'application de la première règle, chaque fois que l'on arrive à un carrefour inexploré ; au bout d'un certain parcours, on arrivera nécessairement à un carrefour déjà exploré ; mais cette situation peut se présenter de deux manières différentes, selon que le chemin d'arrivée a déjà été suivi une première fois ou ne contient encore aucune trace de passage. Alors on applique l'une des deux règles suivantes :

Deuxième règle. — En arrivant à un carrefour déjà exploré, par une voie nouvelle, on doit rétrograder, en marquant par deux traits l'arrivée au carrefour et le départ, ainsi qu'on le voit dans la *fig*. 10.

Troisième règle. — Lorsqu'on arrive à un carrefour déjà exploré par une voie antérieurement suivie, on prendra d'abord

une voie qui n'aura pas été parcourue, s'il en existe, ou, à son défaut, une voie qui n'aura été parcourue qu'une seule fois ; ces deux cas sont représentés dans les *fig.* 11 et 12.

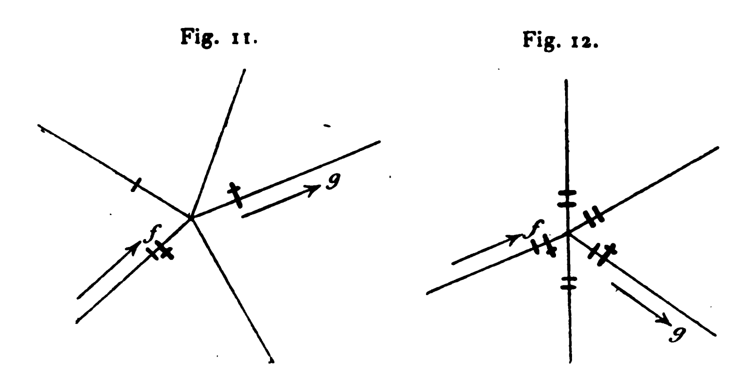


Fig. 11. Fig. 12.

Démonstration. — En exécutant rigoureusement l'application des règles précédentes, on parcourra nécessairement deux fois toutes les lignes du réseau. D'abord on fera les remarques suivantes :

I. Au départ du carrefour A, on y introduit une seule marque initiale.

II. Le passage à travers un carrefour, par l'emploi de l'une des trois règles, ajoute deux marques aux lignes qui aboutissent à ce carrefour.

III. A un moment quelconque de l'exploration du labyrinthe, avant l'arrivée au carrefour ou après le départ du carrefour, le carrefour initial contient un nombre impair de marques, et tout autre carrefour en contient un nombre pair.

IV. A un moment quelconque de l'exploration, avant ou après le passage au carrefour, le carrefour initial ne peut avoir

qu'un seul chemin, marqué une seule fois; tout autre carrefour exploré ne peut avoir que deux chemins marqués une seule fois.

V. Après l'exploration complète, tous les carrefours doivent être couverts de deux marques sur chaque chemin; c'est la condition imposée par l'énoncé.

Cela posé, il est facile de voir que, lorsque le voyageur arrive dans un carrefour M différent du carrefour initial A, il ne peut être arrêté dans sa course par les difficultés du problème. En effet, on ne peut arriver à ce carrefour M que par une voie nouvelle, ou par une voie déjà parcourue une seule fois. Dans le premier cas, on applique la première ou la deuxième règle; dans le second cas, l'entrée au carrefour produit un nombre *impair* de marques; il reste donc, d'après la Remarque III, à défaut d'une voie nouvelle, une ligne qui n'a été traversée qu'une seule fois.

Ainsi, il ne peut y avoir d'arrêt qu'en revenant au carrefour initial A. Soit ZA le chemin qui conduit au repos forcé, en venant du carrefour Z; ce chemin est nécessairement un chemin parcouru une première fois, car sans cela on pourrait continuer le voyage. Puisque le chemin ZA a déjà été traversé, il n'existe dans le carrefour Z aucune voie n'ayant point encore été traversée, car sans cela on aurait oublié d'appliquer le premier cas de la troisième règle; d'ailleurs, il y avait en dehors de ZA une voie, et une seule, YZ, parcourue une seule fois, d'après la Remarque IV. Par conséquent, au moment de l'arrêt en A, toutes les routes du carrefour Z ont été traversées deux fois; on démontrera, de même, que toutes les voies du carrefour précédent Y l'ont été deux fois, et ainsi des autres carrefours. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On peut remplacer la deuxième règle par la suivante, quand il ne s'agit pas d'un carrefour fermé. Si l'on arrive, par une voie nouvelle, à un carrefour déjà exploré, on peut prendre une nouvelle voie, à la condition d'affecter les deux marques du passage au carrefour d'indices correspondants a et a'; alors, si l'on retourne au carrefour par l'une de ces deux voies, on doit reprendre l'autre. Cela revient, pour ainsi dire, à placer un pont aa' au-dessus du carrefour. Cette règle nous a été indiquée par M. Maurice, ancien élève de l'École Polytechnique.



SUR LA THÉORIE DES ARBRES GÉOMÉTRIQUES.

Nous avons vu que, dans l'application de la seconde règle, on doit rétrograder quand on arrive, par une voie nouvelle, à un carrefour exploré. Supposons que l'on supprime, dans le réseau, un petit fragment du chemin qui aboutit à ce carrefour, et que l'on fasse la même opération à tous les endroits de recul; le réseau se transforme alors dans une autre figure géométrique que l'on désigne indistinctement sous le nom d'*arbre*, de *ramification*, d'*arborescence*; les chemins prennent le nom de *branches* ou de *rameaux*, et les carrefours le nom d'*embranchements* ou de *nœuds*. De pareilles configurations ont été étudiées par MM. Jordan, Sylvester, Cayley, Septimus Tebay, et tout récemment par M. le prince C. de Polignac [1].

On donne habituellement de l'arbre géométrique la définition

[1] Jordan, *Journal de Borchardt*. — Sylvester, *Educational Times*. — Cayley, *British Association Report*, 1875. — De Polignac, *Bulletin de la Société mathématique*, t. VIII, p. 120.

suivante : De chaque nœud on peut, en suivant les branches, parvenir à un nœud quelconque, mais par un seul chemin. Cette théorie a été considérablement simplifiée par M. de Polignac au moyen d'une remarque fondamentale. En effet, toute ramification peut être tracée au moyen d'un certain nombre de traits continus, sans répétition ni arrêt, c'est-à-dire en partant de l'extrémité d'une branche et en continuant jusqu'à ce que l'on arrive à l'extrémité d'une autre branche ou à une branche déjà parcourue. Observons que le trait doit traverser une ligne quoique déjà tracée, s'il peut continuer au delà, sans cheminer le long de cette ligne. Cela posé :

Remarque fondamentale. — *De quelque manière que l'on trace une ramification sans répétition ni arrêt, le nombre des parcours sera toujours le même.*

En effet, faisons une coupure à toutes les branches joignant deux nœuds, on décomposera la ramification en une série d'*étoiles*. On recomposera la ramification en rendant aux étoiles leurs rayons communs. Pour chaque étoile, prise séparément, la propriété fondamentale est évidente. Désignons par N_1, N_2, N_3, ..., N_p, les nombres des traits relatifs à chaque étoile; par p le nombre des nœuds ou des étoiles. Si l'on réunit maintenant les deux premières étoiles, on perd un trait sur la somme des parcours relatifs à chaque étoile; réunissons la deuxième étoile à la troisième, nous perdons encore un trait; par suite, si l'on désigne par N le nombre des traits qui ont servi à tracer la ramification, on a

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_p - (p - 1).$$

Nous appellerons le nombre N la *base* de la ramification; on

peut exprimer les nombres N_1, N_2, ..., et par suite le nombre N lui-même d'après l'ordre des nœuds, ou étoiles, c'est-à-dire par le nombre de branches ou de rayons qui y aboutissent. Le nœud le plus simple est le nœud ternaire ou d'ordre 3 ; soit, en général, m_q l'ordre d'un nœud on a d'abord m au moins égal à trois ; le nombre N_q des traits qui permettent de dessiner ce nœud est égal à la moitié de m_q, si m_q est pair, et à la moitié de $m_q + 1$, lorsque m_q est impair ; c'est donc, dans tous les cas, le plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{m_q + 1}{2}$.

Ce nombre est habituellement représenté par le symbole

$$\left[\frac{m_q + 1}{2}\right];$$

par conséquent la formule précédente peut s'écrire

$$N = \left[\frac{m_1 + 1}{2}\right] + \left[\frac{m_2 + 1}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{m_q + 1}{2}\right] - (p - 1).$$

On détermine ainsi la base de la ramification connaissant le nombre et l'ordre des nœuds.

Désignons par l le nombre des extrémités libres des branches, et supposons que la ramification n'ait que des nœuds d'ordre ternaire ; on a alors, quel que soit le nombre des nœuds ternaires, la formule

$$N = l - 1.$$

Cette formule est évidente pour une étoile à trois rayons ; si l'on ajoute un nœud ternaire à l'extrémité libre d'une branche, on remplace celle-ci par deux autres, et l'on ajoute un trait ; lorsque l'on forme un nœud ternaire par l'addition d'un rameau sur une branche, on ajoute un trait et une extrémité libre. Dans les deux

cas, les deux membres de la formule précédente augmentent d'une unité. Donc cette formule est générale.

Désignons en général par p_k le nombre des nœuds d'ordre k; on a, pour deux nœuds séparés d'ordre quaternaire (p'_4 et p''_4 étant l'unité),

$$N' = l' - 1 - p'_4, \quad N'' = l'' - 1 - p''_4.$$

En réunissant deux nœuds quaternaires par une extrémité commune, le nombre total des traits diminue d'une unité, mais deux extrémités disparaissent; on a donc

$$N + 1 = N' + N'', \quad l' + l'' = l + 2, \quad p'_4 + p''_4 = p_4;$$

par suite, on a pour la ramification des deux nœuds quaternaires

$$N = l - 1 - p_4;$$

cette formule s'applique à une ramification formée d'un nombre quelconque de nœuds quaternaires. On démontrera de même que la base d'une ramification ne contenant que des nœuds de cinquième ordre en nombre p_5 est donnée par la formule

$$N = l - 1 - p_5.$$

Plus généralement, lorsqu'une ramification ne contient que des nœuds d'ordre 2μ, on a

$$N = l - 1 - (\mu - 1) p_{2\mu};$$

et lorsqu'elle ne contient que des nœuds d'ordre $2\mu + 1$, on a encore

$$N = l - 1 - (\mu - 1) p_{2\mu+1}.$$

Par suite, en réunissant deux ou plusieurs ramifications par deux extrémités libres, on obtient la formule générale

$$N = l - 1 - (p_4 + p_5) - 2\,(p_6 + p_7) - 3\,(p_8 + p_9) - 4\,(p_{10} + p_{11}) - \dots$$

Nous indiquerons dans la Note III placée à la fin du volume les divers rapprochements que l'on peut établir entre la théorie des arbres et le jeu des ponts et des îles.



QUATRIÈME RÉCRÉATION.

LE PROBLÈME DES HUIT REINES

AU JEU DES ÉCHECS.

A Monsieur le général Th. Parmentier, membre du Comité des fortifications, inspecteur général de la défense des côtes.

« Que dirai-je de l'esprit du jeu ? Pourrait-on me le définir ? Ne faut-il ni prévoyance, ni finesse, ni habileté pour jouer l'hombre ou les échecs ? Et s'il en faut, pourquoi voit-on des imbéciles qui y excellent, et de très beaux génies qui n'ont pu même atteindre la médiocrité. »

(La Bruyère. — *Des Jugements.*)

« Car, si l'on peut être homme d'esprit et grand joueur d'échecs comme Légal, on peut être aussi un grand joueur d'échecs et un sot, comme Foubert et Mayot. »

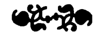
(Diderot. — *Le Neveu de Rameau.*)

QUATRIÈME RÉCRÉATION.

LE PROBLÈME DES HUIT REINES

AU JEU DES ÉCHECS.

Le problème qu'il s'agit de résoudre est le suivant : *Déterminer toutes les manières de placer huit reines sur l'échiquier ordinaire, formé de soixante-quatre cases, de telle sorte qu'aucune des reines ne puisse être prise par une autre; en d'autres termes, sur huit des cases de l'échiquier, disposer huit reines de telle façon que deux quelconques d'entre elles ne soient jamais situées sur une même ligne parallèle à l'un des bords ou à l'une des diagonales de l'échiquier.*



HISTORIQUE.

Ce problème a été proposé pour la première fois par Nauck à l'illustre Gauss, que les Allemands ont surnommé *Princeps mathematicorum;* cette question fut l'objet d'une correspondance

entre ce dernier et l'astronome Schumacher. Après avoir trouvé 76, puis 72 solutions, Gauss trouva enfin le nombre de 92 solutions, qui a été reconnu définitivement pour le nombre exact. Le docteur S. Günther, membre du Parlement de Berlin, a donné, il y a quelques années, une intéressante histoire de ce problème célèbre [1]. Il a indiqué en même temps une nouvelle méthode de recherche pour parvenir à la résolution du problème en question, en supposant que l'échiquier de 64 cases soit remplacé par un échiquier carré de grandeur quelconque; il en a fait l'application à la recherche du problème de 4, 5 reines pour les échiquiers de 16, 25 cases; de plus, cette même méthode a été étendue par M. le professeur J.-W.-L. Glaisher, de l'Université de Cambridge, dans le *Philosophical Magazine*, au problème de 6, 7 ou 8 reines pour les échiquiers carrés de 36, 49 et 64 cases [2].

Antérieurement, le sujet avait été traité par G. Bellavitis, qui a donné aussi les 92 solutions [3]. Plus tard, le problème a été proposé, comme question à résoudre, par M. Lionnet [4]. En 1867, la même question avait été proposée à MM. Parmentier, lieutenant-colonel du Génie, et de La Noë, capitaine du Génie, par un joueur d'échecs, qui pensait que ce problème n'avait que fort peu de solutions; ayant trouvé, par tâtonnements, un certain nombre d'entre elles, ils se sont efforcés de

[1] *Archiv der Mathematik und Physik*, de Grunert, vol. LVI, part. 3, p. 291-292.— *Zur mathematischen Theorie des Schachbretts*. Leipzig, 1874.

[2] *On the problem of the eight queens.* (Extrait du *Philosophical Magazine*, décembre 1874.)

[3] *Atti dell' Istituto Veneto*, t. VI, p. 134. Venise, mars 1861.

[4] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e Série, t. III, p. 560. Paris, novembre 1869.

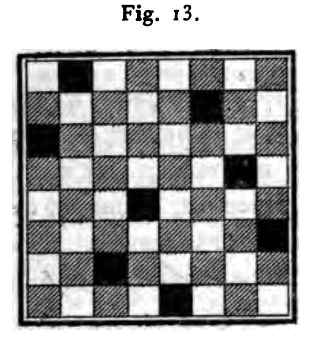
rechercher méthodiquement toutes les dispositions possibles, ignorant tous deux que la question eût été abordée et résolue depuis longtemps. Dans les pages qui suivent, nous indiquerons d'abord en quelques mots la méthode du docteur Günther; puis nous développerons la méthode de recherche dont tout l'honneur revient à M. le capitaine de La Noë, et que M. le général Th. Parmentier a bien voulu me communiquer au Congrès de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, à Montpellier, au mois d'août 1879.



NOTATIONS ET CONVENTIONS.

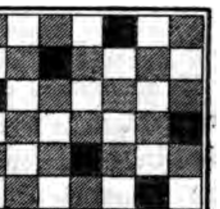
Nous indiquons, par des cases noires, sur les cases blanches ou grises de l'échiquier, la position des huit reines; nous donnons dans la *fig.* 13 une des solutions du problème. Nous la représen-

Fig. 13.



Position I.

Fig. 14.



Position II.

tons par le nombre de huit chiffres **68241753**; le premier chiffre **6** indique la hauteur de la reine dans la première colonne, à la



gauche de l'échiquier; le deuxième chiffre 8 montre que dans la deuxième colonne il y a une reine en haut de l'échiquier, et ainsi de suite; nous désignerons donc, dorénavant, les rangées verticales de cases par le mot *colonnes*, et les rangées horizontales par celui de *lignes;* les colonnes seront comptées de 1 jusqu'à 8, de la gauche vers la droite; les lignes seront également comptées de 1 jusqu'à 8, et de bas en haut. Par conséquent, la solution de la *fig.* 13 pourrait s'écrire :

(A)									
	Lignes	6	8	2	4	1	7	5	3
	Colonnes	1	2	3	4	5	6	7	8

Mais, pour abréger, nous indiquerons cette solution, ainsi que nous l'avons dit, par le nombre de huit chiffres 68241753; ce nombre est la reproduction de la première ligne du tableau précédent.



DES SOLUTIONS ADJOINTES.

La *fig.* 14 représente une première solution *adjointe* à celle de la *fig.* 13; on l'obtient en faisant tourner l'échiquier d'un quart de tour, et dans le sens opposé au mouvement des aiguilles d'une montre. Pour l'obtenir numériquement, au moyen de la première, il suffit de ranger les colonnes du tableau (A), de telle sorte que les chiffres de la première colonne suivent l'ordre décroissant; ainsi :

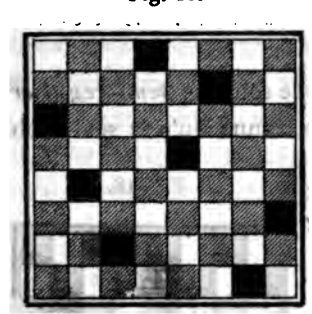
(B)									
	Lignes........	8	7	6	5	4	3	2	1
	Colonnes......	2	6	1	7	4	8	3	5

On a la notation abrégée de cette seconde solution, en conser-

vant la seconde ligne de chiffres du tableau (B), c'est-à-dire le nombre **26174835**.

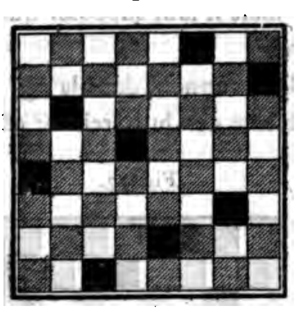
Les *fig.* 15 et 16 représentent une deuxième et une troisième solution *adjointes* à celle de la *fig.* 13; on les obtient en faisant

Fig. 15.



Position III.

Fig. 16.



Position IV.

encore tourner l'échiquier d'un et de deux quarts de tour autour de son centre, et dans le sens convenu. On peut déduire numériquement la solution de la *fig.* 15 de la position II, et la position IV de la position III, par le procédé qui nous a permis de déduire la seconde position de la première; mais on peut encore obtenir la position III au moyen de la position I, et la position IV au moyen de la position II, de la manière suivante. Les solutions des *fig.* 13 et 14 sont désignées par les nombres

68241753 et **26174835**.

Écrivons les chiffres de ces deux nombres dans l'ordre inverse

35714286 et **53847162**;

retranchons chacun des chiffres de **9**, nous obtenons

64285713 et **46152837**;

ce sont les notations des *fig.* 15 et 16.

DES SOLUTIONS IRRÉGULIÈRES ET SEMI-RÉGULIÈRES.

Ainsi, en général, une solution quelconque du problème des reines, pour un échiquier carré quelconque, donne lieu à quatre solutions *adjointes*. Nous disons que cela a lieu dans le cas général; mais il faut supposer que la solution considérée est *irrégulière*.

Nous donnons dans la *fig.* 17 une solution *semi-régulière* du problème des huit reines; elle ne donne qu'une seule solution

Fig. 17.

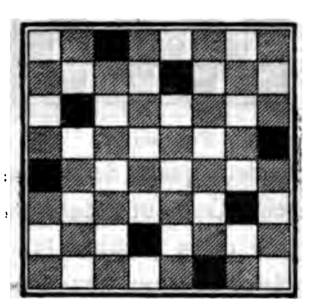
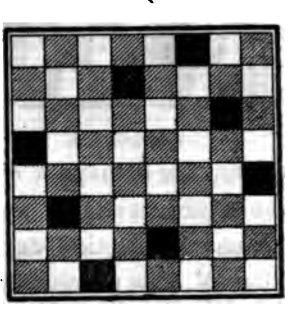


Fig. 18.



adjointe; en effet, si l'on tourne l'échiquier d'un demi-tour, on retrouve la même disposition. Le nombre **46827135**, qui représente cette solution, possède cette propriété que la somme de ce nombre et du nombre retourné donne **99999999**.



DES SOLUTIONS RÉGULIÈRES.

Il peut arriver, bien que cela n'ait pas lieu pour l'échiquier de 64 cases, mais pour d'autres échiquiers carrés, qu'une solution

du problème des reines ne donne aucune disposition nouvelle, lorsqu'on fait tourner l'échiquier d'un quart de tour ou de plusieurs. On observera d'abord que la notation employée ci-dessus s'applique à tous les échiquiers, en admettant que chaque chiffre de la notation puisse être remplacé par un nombre qui ne dépasse pas le nombre des cases contenues dans le côté de l'échiquier; cependant nous ferons remarquer que la solution dont nous parlons, et que nous désignerons sous le nom de *solution régulière*, ne peut se présenter, à cause des quatre points de vue sous lesquels on peut envisager l'échiquier, que lorsque le nombre des cases contenues sur le côté est un multiple de 4, comme 4, 8, 12, 16 (bien que cela n'ait pas lieu pour l'échiquier de 64 cases); ou lorsque le nombre des cases contenues sur le côté est égal à un multiple de 4 augmenté de l'unité.

Telles sont, par exemple, les solutions **2413**, pour l'échiquier de 16 cases, et **25314** pour l'échiquier de 25 cases. Nous désignerons la solution semi-régulière, en faisant suivre sa notation numérique d'un *, et la solution régulière, en faisant suivre sa notation numérique de deux **.

Ainsi on a, par exemple,

46827135*, **2413****, **25314****.



DES SOLUTIONS RENVERSÉES.

Considérons une disposition quelconque régulière, semi-régulière ou irrégulière du problème des reines; intervertissons sur la figure l'ordre des lignes ou des colonnes; ou, ce qui revient au même, écrivons en sens inverse la notation numérique qui repré-



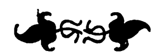
sente cette disposition; nous obtiendrons ainsi une *solution renversée;* d'ailleurs, il est facile de constater que cette solution nouvelle diffère de l'une quelconque des solutions adjointes. On l'obtiendrait encore géométriquement en la regardant dans un miroir, ou en retournant l'échiquier. Il résulte évidemment de la considération des formes adjointes et renversées que :

1° Toute solution irrégulière simple fournit quatre solutions adjointes et quatre renversées, en tout HUIT;

2° Toute solution semi-régulière simple fournit deux solutions adjointes et deux renversées, en tout QUATRE;

3° Toute solution régulière simple ne fournit qu'une solution renversée, en tout DEUX.

Cependant on doit excepter, dans cette classification et dans ce dénombrement, l'UNIQUE solution du problème des reines, dans l'échiquier d'une seule case.



PROBLÈME DES TOURS.

La *marche de la reine*, au jeu des échecs, est, comme on sait, la résultante de la *marche de la tour* et de la *marche du fou*. En effet, dans un échiquier sur lequel on ne supposerait qu'une seule tour, le déplacement de celle-ci s'effectue sur une case quelconque située dans une rangée, ligne ou colonne, parallèle à l'un des bords de l'échiquier; de même, le déplacement du fou ne peut s'effectuer que sur une ligne parallèle à l'une des deux diagonalés de l'échiquier. Il résulte immédiatement de cette observation que les solutions du problème des huit reines doivent être prises parmi les solutions du *problème des huit tours*, qui

consiste à disposer sur l'échiquier huit tours qui ne peuvent se prendre mutuellement, tout aussi bien que parmi les solutions du *problème des huit fous*, qui consiste à disposer, sur l'échiquier de 64 cases, huit fous qui ne peuvent se prendre mutuellement. Le problème des huit tours sur l'échiquier de 64 cases, ou de 9, 10, 11,... tours sur les échiquiers de 81,100,121,... cases, est bien connu, sous une forme purement arithmétique. En nous bornant à l'échiquier ordinaire et en nous servant de la notation numérique du problème des reines, il suffit, en effet, de permuter les huit premiers nombres de toutes les manières possibles.

LES PERMUTATIONS RECTILIGNES.

Pour l'échiquier de 2 cases de côté, on a les *deux* solutions :

12 et **21**;

pour celui de 3 cases de côté, il suffit de placer le chiffre **3** avant ou après l'un ou l'autre des chiffres des deux nombres précédents; on a ainsi les *six* solutions :

312, 132, 123 et **321, 231, 213.**

De même, pour l'échiquier de 4 cases de côté, on placera le chiffre **4** à toutes les places possibles, pour chacun des six nombres qui précèdent; chaque nombre donne lieu à quatre places, ce qui fait en tout *vingt-quatre* solutions pour le problème des 4 tours sur l'échiquier de 16 cases.

En continuant, pour obtenir le nombre des solutions du problème des *cinq* tours sur l'échiquier de *vingt-cinq* cases, il fau-

drait multiplier par 5 le nombre des solutions du problème des *quatre* tours, et ainsi de suite. Ainsi le nombre des solutions du problème des *huit* tours sur l'échiquier ordinaire est égal au produit des huit premiers nombres,

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320,$$

et, sur le damier de 100 cases, le nombre des solutions distinctes du problème des *dix* tours est égal à 3628800.



L'ANAGRAMME DE PASCAL.

Lorsque la permutation des lettres d'un mot ou d'une phrase forme un nouveau mot ou une nouvelle phrase, la permutation prend le nom d'*anagramme*. Ainsi les mots *logarithme* et *algorithme* sont formés des mêmes lettres dans un ordre différent. Quelques anagrammes sont restés célèbres; ainsi dans *frère Jacques Clément,* on trouve : *c'est l'enfer qui m'a créé;* dans *Révolution française*, on trouve : *Un veto corse la finira;* mais de tous les anagrammes, le plus curieux a été donné par Pascal; jusqu'à ces dernières années, il a exercé la sagacité et la patience des érudits. On lit, dans les *Pensées :* « La manière d'écrire d'Épictète, de Montaigne et de Salomon de Tultie est la plus d'usage, qui s'insinue le mieux, qui demeure plus dans la mémoire et qui se fait le plus citer, parce qu'elle est toute composée de pensées nées sur les entretiens ordinaires de la vie [1]. »

Le commentateur a ajouté au bas de la page cette observation : « Salomon de Tultie n'existe point. C'est évidemment un pseu-

[1] PASCAL, *Œuvres complètes*, t. I, p. 288, édition Hachette, 1864.

donyme de l'invention de Pascal. » Or, en changeant l'ordre des lettres de *Salomon de Tultie,* on trouve *Louis de Montalte,* nom sous lequel l'auteur de la théorie des combinaisons fit paraître les *Lettres Provinciales.*



PROBLÈME DES FOUS.

Le nombre des solutions du problème des fous est beaucoup plus grand et présente des développements bien plus difficiles; en effet, on observera que, non seulement il est facile de placer 8 fous sur l'échiquier, mais que l'on peut en placer jusqu'à 14, sans qu'ils soient mutuellement en prise. Ainsi, par exemple, 8 sur les cases de la première colonne, et 6 sur celles de la dernière, en supprimant les deux cases extrêmes. Il est donc préférable de revenir sur les diverses solutions du problème des tours, pour ne conserver, parmi celles-ci, que les solutions qui conviennent au problème des reines.

Au point de vue arithmétique, le problème des huit tours se ramène, ainsi que nous l'avons vu, à effectuer toutes les permutations des huit premiers nombres; le problème des huit reines revient à choisir, parmi celles-ci, toutes les permutations dans lesquelles la différence absolue de deux chiffres quelconques n'est pas égale à la différence des rangs occupés par ces deux chiffres dans la permutation considérée.

Cette nouvelle condition revient, comme il est facile de s'en apercevoir, à la marche du fou, que l'on joint à celle de la tour pour obtenir celle de la reine.

Par conséquent, résoudre le problème des huit reines revient

à trouver tous les nombres de huit chiffres, formés des huit premiers chiffres, tous différents, mais dans un ordre quelconque, de telle sorte que la différence de deux d'entre eux soit distincte de la différence des rangs qu'ils occupent; c'est ainsi que le problème a été posé naguère par M. Lionnet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

MÉTHODE DE M. GÜNTHER.

Cette méthode se distingue peu, au fond, de la méthode arithmétique dont nous venons de parler; nous allons l'expliquer sur un échiquier de vingt-cinq cases, que nous représenterons ainsi qu'il suit :

$$\begin{vmatrix} a_1 & f_2 & g_3 & h_4 & i_5 \\ b_2 & a_3 & f_4 & g_5 & h_6 \\ c_3 & b_4 & a_5 & f_6 & g_7 \\ d_4 & c_5 & b_6 & a_7 & f_8 \\ e_5 & d_6 & c_7 & b_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

Chaque case est représentée par un *élément* composé d'une lettre et d'un indice; les éléments ayant la même lettre sont situés sur une parallèle à l'une des diagonales de l'échiquier, et correspondent à l'une des directions de la marche du fou; les éléments ayant le même indice sont situés sur une parallèle à l'autre diagonale de l'échiquier, et correspondent à l'autre direction de la marche d'un fou. Supposons donc que l'on écrive, dans un ordre quelconque, tous les termes formés de cinq élé-

ments, mais de telle sorte que ces termes ne puissent contenir deux éléments appartenant à une même ligne ou à une même colonne, nous aurons représenté de cette façon les 120 solutions du problème des cinq tours. Cela fait, supprimons parmi ces solutions toutes celles dans lesquelles deux éléments contiennent la même lettre ou le même indice, il ne restera plus que les dispositions qui conviennent au problème des cinq reines.

Il n'est pas nécessaire d'écrire toutes les solutions du problème des cinq tours, que l'on pourrait former au moyen des solutions du problème des quatre tours, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut. On trouve de grandes simplifications dans l'application de cette méthode, en se servant des ressources d'une importante théorie d'algèbre, connue sous le nom de *théorie des déterminants;* cependant, malgré toute l'habileté montrée par MM. Günther et Glaisher dans cette question, le problème des neuf reines ou des dix reines, sur les échiquiers de 81 et de 100 cases, semble presque inabordable par cette méthode.

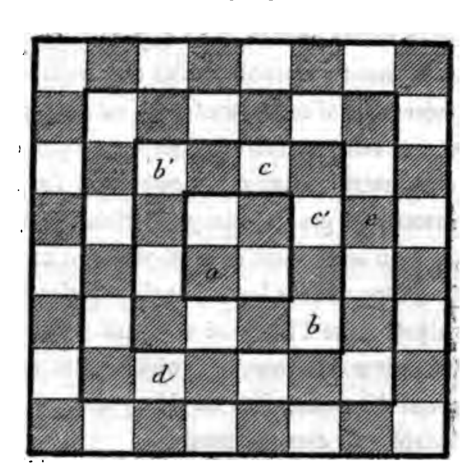


MÉTHODE DE M. DE LA NOË.

Cette méthode consiste dans la décomposition de l'échiquier en carrés concentriques; le premier forme un carré intérieur ou *première bande* de 4 cases, dont l'une est *a*; nous désignerons sous le nom de *deuxième bande* l'espace formé par les 12 cases qui entourent le premier carré; par *troisième bande,* l'espace formé par les 20 cases qui entourent la deuxième bande; par *quatrième bande,* l'espace formé par les 28 cases qui entourent la troisième bande; on continuerait ainsi pour un *échiquier pair* de grandeur

quelconque, c'est-à-dire pour un échiquier dont le nombre des cases contenues sur le côté est un nombre pair; le nombre des cases de chaque bande augmente de 8 lorsque l'on passe à la

Fig. 19.



bande suivante. Pour un ***échiquier impair,*** la première bande serait formée de 1 carré; la seconde bande, de 8 carrés, et les suivantes, de 16, 24, 32, ... carrés.

Partons de la première bande, et plaçons une reine en *a*; on observera que cette reine peut occuper, après un seul déplacement, 28 cases de l'échiquier, nombre toujours égal au nombre des cases de la bande extérieure de l'échiquier; dans la deuxième bande, une reine commande 26 cases; dans la troisième 24, et dans la quatrième 22. Maintenant, cherchons à placer le plus grand nombre de reines sur la seconde bande, de toutes les manières possibles. On voit que l'on peut placer deux reines sur la deuxième

bande, en *b* et *c*, ou bien en *b'* et *c'*; il est inutile de conserver, pour l'instant, cette seconde disposition symétrique de la première. En effet, en se bornant à l'échiquier de 16 cases, la première disposition (*abc*) s'écrirait **0241**; la solution renversée serait **1420**, et en faisant faire à l'échiquier trois quarts de tour, on obtiendrait la disposition **4203**, qui est précisément la même que (*b'ac'*). Pour une raison semblable à la précédente, on voit qu'il n'est pas nécessaire de déplacer la reine *a* sur les autres cases de la première bande.

En partant de (*abc*), on placera le plus de reines possible sur la troisième bande, en *d* et *e*, par exemple; il restera donc à placer trois reines sur la bande extérieure, et l'on constatera facilement que cela est impossible; donc, en plaçant les cinq reines (*abcde*), on n'arrive à aucune solution. On essayera alors de n'en conserver qu'une seule sur la troisième bande, soit en *d*, soit en *e*, et l'on verra qu'aucune de ces dispositions ne conduit à une solution; d'ailleurs on ne peut placer cinq reines sur une seule bande; par conséquent, le commencement (*abc*) ne peut conduire à aucune solution.

En conservant la reine *a*, on essayera successivement, tout en maintenant *b* ou *c*, de placer les six autres reines sur les deux dernières bandes; mais on ne trouve aucune solution; d'où l'on tire cette conclusion que les deux premières bandes ne peuvent être simultanément occupées par les reines; c'est là un fait observé sur tous les échiquiers, jusqu'à celui de 64 cases, par M. Parmentier; mais cela n'a plus lieu pour l'échiquier de 100 cases.

On conserve encore la reine *a*, et l'on cherche à placer le plus de reines sur la troisième bande; on peut en placer trois de

diverses manières; puis, en excluant les solutions adjointes ou renversées, on place les quatre reines sur la quatrième bande; on trouve ainsi les quatre solutions simples irrégulières :

35841726, 46152837, 48157263, 42751863,

qui correspondent au *type* **1034**. Les chiffres du type représentent successivement le nombre des reines placées dans chaque bande.

En supprimant la reine *a*, et plaçant trois reines, puis deux, puis une seule sur la seconde bande, on trouve les solutions simples irrégulières :

72631485;	pour le type	**0314**,
57263148, **16837425**;	—	**0233**,
61528374, **57263184**, **51468273**;	—	**0224**,
58417263,	—	**0134**.

Enfin, si l'on ne place aucune reine sur les deux premières bandes, on trouve la solution semi-régulière de la *fig.* 6, qui appartient au type **0044**. Ainsi, en tout, le problème des huit reines comporte douze solutions simples dont onze irrégulières et une semi-régulière; au total, quatre-vingt-douze solutions distinctes.

Pour résumer le problème des huit reines, nous donnerons le tableau des douze solutions simples dans l'ordre suivant :

Tableau des solutions simples du problème des huit reines.

Nos D'ORDRE.	NOTATION.	TYPE.	Nos D'ORDRE.	NOTATION.	TYPE.
1	72631485	0314	7	16837425	0233
2	61528374	0224	8	57263184	0224
3	58417263	0134	9	48157263	1034
4	35841726	1034	10	51468273	0224
5	46152837	1034	11	42751863	1034
6	57263148	0233	12	35281746*	0044



PROCÉDÉS MNÉMOTECHNIQUES.

On peut se rappeler la première solution, dont on déduit régulièrement les six suivantes, au moyen d'une phrase mnémotechnique telle que celle-ci :

C'est difficile si tu veux que huit cadrent.
sept deux six trois un quatre huit cinq.

On déduit ensuite la deuxième solution, et la troisième, en abaissant d'un rang toutes les reines de la première solution, et en reportant en haut de l'échiquier la reine qui se trouvait sur la première ligne; on obtient les solutions des numéros 4, 5 et 6 en avançant d'un rang vers la droite, les reines des solutions de rangs 1, 2 et 3; on déduit la septième solution de la sixième en élevant d'un rang toutes les reines, et en les reportant d'un rang vers la droite.

On peut encore se servir de la méthode suivante : On suppose l'échiquier entouré de huit autres, que l'on est censé replacer ensuite sur le premier, avec les reines ; on dessine la *fig.* 20, formée de deux *lignes de quatre cavaliers*, en prenant pour le

Fig. 20.

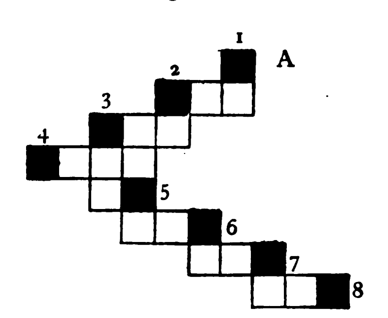


Fig. 21.

		5′	2′				
		4′	3′				
	7						
6							1
5							2
4							3
				7′			
		6′	1′				

point de départ, figuré par la case A, l'une des cases numérotées de la *fig.* 21 ; les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 donnent les sept premières solutions, et les numéros 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′ donnent les solutions renversées.

Pour les cinq autres, on opère comme il suit :

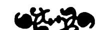
La huitième solution s'obtient au moyen de la sixième, en échangeant seulement les deux dernières reines.

La neuvième solution s'obtient au moyen de la huitième, en faisant avancer toutes les reines de trois cases vers la droite, et en échangeant ensuite la première reine avec la troisième.

La dixième solution se déduit de la neuvième, en remontant d'une case toutes les reines situées au-dessus de la troisième ligne horizontale, et, corrigeant la position, en élevant la reine de la troisième colonne verticale de la première case à la quatrième.

La onzième solution peut aussi se déduire de la neuvième, en laissant en place les reines des quatre lignes horizontales du milieu et en déplaçant symétriquement les quatre autres reines, par rapport à la quatrième colonne verticale.

Quant à la douzième solution, elle est symétrique et facile à retenir.



MOINS DE HUIT REINES.

En appliquant la méthode précédente aux échiquiers de moins de 64 cases, M. Parmentier a trouvé les résultats consignés dans le tableau suivant :

Tableau des solutions simples du problème des 4, 5, 6, 7 *reines.*

n.	N.	TOTAL.	TYPE.	NOTATION.
4	16	2	04	2413**
5	25	10	104	25314**
			023	53142
6	36	4	024	246135*
7	49	40	0124	6357142
.	..	..	1024	5724613*
.	..	..	»	3724615*
.	..	..	0214	4613572
.	..	..	0133	1357246
.	..	..	»	3572461

La colonne *n* désigne le nombre de cases sur chaque côté, et la colonne N donne le nombre total des cases de l'échiquier; ainsi $N = n^2$.

La troisième colonne indique le nombre total des solutions réellement distinctes ; la quatrième colonne donne le type ; enfin la cinquième donne la notation des solutions simples. Il n'y a aucune solution pour les échiquiers de 4 cases et de 9 cases.

On retrouve ainsi les nombres des solutions qui ont été donnés, d'une part, par MM. Günther et Glaisher, et, d'autre part, par Bellavitis, dans sa 10[a] *Rivista dei Giornali* (p. 8 et 9).



LES 92 POSITIONS DES HUIT REINES.

Le tableau suivant contient les 92 solutions possibles du problème des huit reines ; c'est, ainsi que nous l'avons dit plus haut, l'ensemble de tous les nombres formés des chiffres différents, de 1 à 8, de telle sorte que la différence de deux chiffres n'est jamais égale à la différence des rangs qu'ils occupent. C'est la reproduction du tableau dressé en 1867, à Constantine, par M. Parmentier. On remarquera que ce tableau contient :

4	solutions	commençant ou finissant	par les chiffres	1 ou 8 ;
8	—	—	—	2 ou 7 ;
16	—	—	—	3 ou 6 ;
18	—	—	—	4 ou 5.

Les huit colonnes de 92 chiffres ont toutes le même total : 414 ou 18 fois 23. Dans chaque colonne, il y a nécessairement autant de chiffres 1 que de chiffres 8, de 2 et de 7, de 3 et de 6, de 4 et de 5. Cette remarque peut servir de vérification.

Tableau des 92 solutions du problème des huit reines.

1	1586 3724	24	3681 5724	47	5146 8273	70	6318 5247
2	1683 7425	25	3682 4175	48	5184 2736	71	6357 1428
3	1746 8253	26	3728 5146	49	5186 3724	72	6358 1427
4	1758 2463	27	3728 6415	50	5246 8317	73	6372 4815
5	2468 3175	28	3847 1625	51	5247 3861	74	6372 8514
6	2571 3864	29	4158 2736	52	5261 7483	75	6374 1825
7	2574 1863	30	4158 6372	53	5281 4736	76	6415 8273
8	2617 4835	31	4258 6137	54	5316 8247	77	6428 5713
9	2683 1475	32	4273 6815	55	5317 2864	78	6471 3528
10	2736 8514	33	4273 6851	56	5384 7162	79	6471 8253
11	2758 1463	34	4275 1863	57	5713 8642	80	6824 1753
12	2861 3574	35	4285 7136	58	5714 2863	81	7138 6425
13	3175 8246	36	4286 1357	59	5724 8136	82	7241 8536
14	3528 1746	37	4615 2837	60	5726 3148	83	7263 1485
15	3528 6471	38	4682 7135	61	5726 3184	84	7316 8524
16	3571 4286	39	4683 1752	62	5741 3862	85	7382 5164
17	3584 1726	40	4718 5263	63	5841 3627	86	7425 8136
18	3625 8174	41	4738 2516	64	5841 7263	87	7428 6135
19	3627 1485	42	4752 6138	65	6152 8374	88	7531 6824
20	3627 5184	43	4753 1682	66	6271 3584	89	8241 7536
21	3641 8572	44	4813 6275	67	6271 4853	90	8253 1746
22	3642 8571	45	4815 7263	68	6317 5824	91	8316 2574
23	3681 4752	46	4853 1726	69	6318 4275	92	8413 6275



MÉTHODE DE M. LAQUIÈRE.

Dans le tableau précédent, toutes les solutions sont rangées dans l'ordre numérique. On peut construire ce tableau par un

procédé systématique, dont l'application est très simple et qui a été imaginé par M. Laquière, ancien élève de l'École Polytechnique. On place d'abord une reine dans la case la moins élevée de la première colonne à gauche; on place ensuite une seconde reine dans la seconde colonne, sur la case la moins élevée qu'il soit possible, et ainsi de suite, en cherchant toujours à placer une reine dans une nouvelle colonne à droite, le plus bas qu'il soit possible, d'après les conditions du problème, c'est-à-dire en ayant égard aux positions des reines déjà placées à gauche. Lorsqu'il arrive un moment où l'on ne peut plus placer aucune reine dans sa colonne, on élève celle de la colonne précédente de une, deux,..., cases, et l'on continue toujours, d'après le même principe, de n'élever une reine que lorsqu'il n'y a plus de positions admissibles pour l'ensemble des reines à placer à la droite.

Chaque fois qu'une solution est trouvée, on l'inscrit d'après la notation convenue, et les solutions se trouvent ainsi rangées dans l'ordre numérique de la notation. D'ailleurs, on vérifie le tableau obtenu par cette méthode, en renfermant ensuite dans le même groupe toutes les solutions que l'on peut déduire d'une première, par la rotation ou le renversement de l'échiquier, ainsi que nous l'avons expliqué aux paragraphes sur les solutions adjointes et sur les solutions renversées.

En suivant cette méthode, M. Laquière a fait effectuer par un enfant, dans une après-midi, le tableau des 92 solutions de l'échiquier de 64 cases. Ce tableau, facile à vérifier, ne contenait que trois erreurs provenant d'une seule omission et de deux solutions inexactes (¹).

(¹) En appliquant le calcul des probabilités à cet essai, M. Laquière a obtenu le résultat suivant. Soit N le nombre des solutions, ε la probabilité d'une

AUTRE ÉNONCÉ DU PROBLÈME DES REINES.

Au moyen de ce tableau, il est facile de donner la solution du problème des huit reines, énoncé sous la forme suivante :

On place une reine sur l'une quelconque des 64 cases de l'échiquier ordinaire ; déterminer ensuite toutes les manières de disposer sept autres reines, de telle sorte qu'aucune d'elles ne puisse être prise par une autre.

Pour résoudre complètement ce nouveau problème, il est bon d'observer qu'il n'est pas nécessaire de considérer indistinctement

Fig. 22.

			44
		33	43
	22	32	42
11	21	31	41

toutes les cases sur lesquelles on peut poser la première reine, mais seulement les cases numérotées de la *fig.* 22 ; celles-ci

erreur sur l'une d'elles ; la probabilité de voir subsister une erreur, après la comparaison des huit tableaux formés en écrivant les solutions adjointes ou renversées du premier tableau, est donnée par la formule

$$P = \frac{N\varepsilon^8}{(N-1)(N-2)\ldots(N-7)};$$

mais on a $N = 96$, car la solution semi-régulière est comptée pour 8 ; de plus, dans l'essai on a $\varepsilon = \frac{3}{96}$; donc

$$P = \frac{3^8}{96^7.95.94\ldots 89}, \quad \text{ou} \quad P < \frac{1}{3000000000}.$$

couvrent un peu plus du huitième de l'échiquier; on obtiendra les solutions qui correspondent aux autres cases par des procédés de symétrie, suivant les quatre axes de symétrie de l'échiquier.

Pour obtenir toutes les solutions qui proviennent de la case initiale 11, il suffira de prendre dans le tableau complet des 92 solutions toutes celles dont le *premier* chiffre à gauche est *un*; pour obtenir toutes les solutions qui proviennent de la case 22, on choisira celles dont le *deuxième* chiffre est *deux;* pour obtenir toutes les solutions qui correspondent à la case 43, on prendra, dans le tableau, tous les nombres dont le *quatrième* chiffre est *trois*, et ainsi des autres.

Le tableau suivant contient trois colonnes; la première indique le numéro de la case initiale; la deuxième colonne contient le nombre de solutions pour cette case, et la troisième colonne, les numéros des solutions pour lesquelles il faut se reporter au tableau de la page 79.

CASE.	NOMBRE.	NUMÉROS D'ORDRE DES SOLUTIONS.
11	4	1,2,3,4.
21	8	13,29,30,47.48,49,65,81.
31	16	8,37.40,44,45.54,55,57,58,68,69,70,76,84,91,92.
41	18	6,12,16,21,23,24,52,53,62,63,64,66,67,78,79.82,88,89.
22	16	31,32,33,34,35,36,50,51,52,53,66,67,82,83,89,90.
32	14	14,15,18,19,20,26,27,59,60,61,77,80,86,87.
42	8	22,25,38,42,65,73,74,85.
33	4	10,41,81,88.
43	12	2,9,32,33,39,43.44,46,57,83,90,92.
44	8	7,17,48,56,58,59,75,80.

On observera que les cases 11 et 33 sont beaucoup moins favorisées que les autres; mais il y a toujours quatre solutions au moins, et dix-huit au plus, en prenant pour case initiale une case quelconque de l'échiquier.



DESIDERATUM.

Nous venons d'indiquer tout ce qui est connu, ou à peu près, sur le problème des reines. Mais si l'échiquier a 9 ou 10 cases sur le côté, le problème se complique de telle sorte que l'on ne connaît pas le nombre de solutions. Peut-être y aurait-il quelque intérêt à déterminer le nombre des solutions du problème pour les échiquiers de 81, 100, 121 et 144 cases. Alors il se pourrait que l'observation du tableau du nombre des solutions pour tous les échiquiers de 2 à 12 cases de côté pût conduire soit à d'autres méthodes de recherche, soit à des propriétés nouvelles des nombres entiers. La grande difficulté du problème tient à ce que le nombre des permutations de n objets augmente considérablement avec n, et que, par suite, le nombre des permutations qui ne conviennent pas au problème des n reines augmente lui-même très rapidement.

Pour l'échiquier de 11 cases de côté, on peut trouver immédiatement diverses solutions simples, que l'on déduit de la considération de la progression arithmétique. Désignons, pour abréger, par a le nombre dix, et par b le nombre onze; formons les progressions arithmétiques suivantes, dans lesquelles nous supprimons les multiples de onze, le nombre b pouvant être remplacé par zéro :

Progression	1, 3, 5, 7, 9, *b*, 2, 4, 6, 8, *a*,	de raison	2;
—	1, 4, 7, *a*, 2, 5, 8, *b*, 3, 6, 9,	—	3;
—	1, 5, 9, 2, 6, *a*, 3, 7, *b*, 4, 8,	—	4;
—	1, 6, *b*, 5, *a*, 4, 9, 3, 8, 2, 7,	—	5;
—	1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, *a*, 5, *b*, 6,	—	6;
—	1, 8, 4, *b*, 7, 3, *a*, 6, 2, 9, 5,	—	7;
—	1, 9, 6, 3, *b*, 8, 5, 2, *a*, 7, 4,	—	8;
—	1, *a*, 8, 6, 4, 2, *b*, 9, 7, 5, 3,	—	9.

Toutes ces solutions conviennent au problème des onze reines; sur l'échiquier, ces solutions représentent encore ce que l'on appelle les ***armures des satins réguliers sur onze lames***, dont nous avons donné la théorie générale dans l'opuscule : ***Principii fondamentali della geometria dei tessuti*** (1).



THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE :

Considérons une progression arithmétique de raison r :

$$\div\, a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \ldots;$$

si l'on prend les restes de la division des différents termes par un nombre p, il ne peut y avoir plus de p restes différents; d'ailleurs, ces restes se reproduisent périodiquement de p en p. Pour que tous les restes soient distincts, il faut et il suffit que le nombre p soit premier avec la raison r. En effet, désignons par r_m et r_n les

(1) *L'Ingegneria Civile e le Arti Industriali.* Anno VI, fasc. 7° ed 8°. Torino, 1880.

restes de rangs m et n, on a (¹)

$$r_m \equiv a + (m - 1)r, \quad (\text{Mod. } p),$$
$$r_n \equiv a + (n - 1)r, \quad (\text{Mod. } p),$$

et, par différence,

$$r_m - r_n \equiv (m - n)r, \quad (\text{Mod. } p).$$

Par conséquent, si les restes r_m et r_n étaient identiques, le produit $(m - n)r$ serait divisible par p; mais p étant supposé premier avec r diviserait le nombre $(m - n)$ plus petit que lui; ce qui est impossible. Donc :

Théorème I. — *Si l'on divise par un nombre p premier avec la raison, p termes consécutifs d'une progression arithmétique formée de nombres entiers, tous les restes sont différents.*

On dit alors que ces restes forment *un système complet de résidus suivant le module p.*

Supposons, de plus, que p désigne un nombre premier avec la raison, et avec la raison augmentée ou diminuée de l'unité; on a alors le théorème suivant :

Théorème II. — *Si l'on divise p termes consécutifs d'une progression arithmétique de raison r par un nombre p premier avec chacun des nombres* $r, r+1, r-1$, *la différence de deux restes quelconques n'est jamais, en valeur absolue, égale à la différence des rangs qu'ils occupent dans la progression.*

(¹) La notation $a \equiv b$, (Mod. p), veut dire que a et b diffèrent d'un multiple quelconque de p; elle se lit *a congru à b suivant le module p.* Elle a été imaginée par Gauss; c'est une excellente notation qui, malheureusement, n'a pas encore été adoptée, en France, d'une manière générale.



En effet, si l'on supposait

$$r_m - r_n \equiv \pm (m - n), \quad (\text{Mod. } p),$$

on en déduirait, d'après ce qui précède,

$$(m - n) r \equiv \pm (m - n), \quad (\text{Mod. } p),$$

ou bien

$$(m - n)(r \pm 1) \equiv 0, \quad (\text{Mod. } p).$$

Donc p premier avec $r \pm 1$ diviserait le nombre $(m - n)$ plus petit que lui; ce qui est impossible.

Il résulte de ces deux théorèmes que l'on peut, dans beaucoup de cas, trouver un grand nombre de solutions du problème des p reines, en supposant que p désigne un nombre impair, non divisible par 3.



CINQUIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DU SOLITAIRE.

A M. H. Hermary, ancien élève de l'École Polytechnique, capitaine au Comité d'artillerie.

« Les premières notions de mathématiques doivent faire partie de l'éducation de l'enfance. Les chiffres, les lignes parlent plus qu'on ne croit à leur imagination naissante, et c'est un moyen sûr de l'exercer sans l'égarer. »

(CONDORCET, *Discours sur les Mathématiques*.)

« Il faut jouer au solitaire,
Quand on n'est plus dans les beaux ans. »

(PANARD, *Chansons*, t. III.)

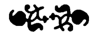


CINQUIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU SOLITAIRE.

Comme son nom l'indique, le jeu du solitaire est joué par une seule personne; il consiste, au point de vue le plus général, dans la recherche de problèmes concernant la géométrie de situation. Cependant ce jeu peut être effectué par deux ou plus de deux personnes, qui se proposeraient réciproquement la résolution de problèmes de plus en plus compliqués. Cette remarque s'applique d'ailleurs à tous les jeux qui sont étudiés dans ce volume; tous peuvent être joués par un seul partenaire ou par plusieurs.



HISTORIQUE.

D'après l'*Encyclopédie méthodique*, ce jeu nous viendrait d'Amérique, où un voyageur français en aurait conçu l'idée et



réglé la marche, en regardant des sauvages qui revenaient de la chasse, et plantaient leurs flèches en différents trous disposés régulièrement sur la paroi de leurs cabanes. Le *Dictionnaire des origines* fait observer, mais sans en dire plus, que le jeu du solitaire dérive du *jeu des mages,* ou des carrés magiques. Il est fort possible qu'il y ait une relation étroite entre ces deux jeux : c'est là une question intéressante que nous soumettons à la perspicacité de nos lecteurs. D'autres font naître le solitaire en Chine, à une époque très reculée.

Quoi qu'il en soit, le jeu du solitaire était bien connu dès le commencement du dernier siècle. Le premier volume des Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (*Miscellanea Berolinensia*, 1710) contient un Mémoire de Leibniz ayant pour titre : *Annotatio de quibusdam ludis*, etc., et qui débute ainsi : « Non ita pridem increbuit ludi genus singulare quem *Solitarium* appellant (¹). » On y trouve encore le passage suivant : « Sæpe notavimus nusquam homines quam in ludicris ingeniosiores esse : atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa. » Plus tard, dans une lettre adressée à M. de Montmort, le 17 janvier 1716, Leibniz s'exprimait ainsi : « Le jeu nommé *le Solitaire* m'a plu assez. Je l'ai pris d'une manière renversée, c'est-à-dire qu'au lieu de défaire un composé de pièces selon la loi de ce jeu, qui est de sauter dans une place vide et d'ôter la pièce sur laquelle on saute, j'ai cru qu'il serait plus beau de rétablir ce qui a été défait, en remplissant un trou sur lequel on saute; et par ce moyen on pourrait se proposer de former une telle ou telle figure proposée, si elle est faisable, comme elle l'est sans

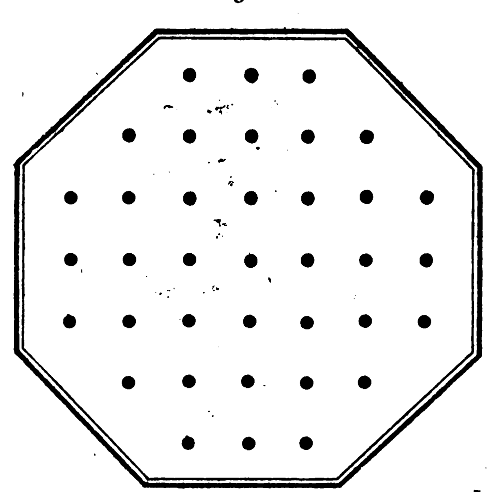
(¹) *Voir* le *Dictionnaire mathématique* de Klügel, continué par Mollweide (*Klügel's math. Wörterbuch*, IVᵉ Partie, p. 466).

doute si elle est défaisable. Mais à quoi bon cela ? dira-t-on. Je réponds : à perfectionner l'art d'inventer. Car il faudrait avoir des méthodes pour venir à bout de tout ce qui peut se trouver par raison. »

DÉFINITION DU SOLITAIRE.

Ce jeu se compose essentiellement d'une planchette ayant la forme d'un octogone régulier, et percée de *trente-sept* trous placés aux sommets de carrés, conformément à la figure suivante.

Fig. 23.



Tous ces trous sont garnis d'une cheville, en os ou en ivoire, appelée *fiche*. Cependant, depuis quelques années, on a remplacé la planchette octogone par une planchette circulaire, les trous

par des creux hémisphériques, et les fiches par des billes ou des *boules*.

Lorsqu'on n'a pas de jeu de solitaire à sa disposition, on y supplée facilement, en utilisant certaines *cases* du damier, et en se servant des pions. Mais il est encore plus simple de dessiner sur une feuille de carton la figure suivante, en plaçant les numéros correspondants dans le même angle de chacun des carrés de l'échiquier. On observera que la notation dont nous nous servons est entièrement conforme aux principes de la géométrie analytique; nous ajouterons que c'est la notation qui a été proposée pour l'échiquier ([1]) par un illustre mathématicien français de la fin du siècle dernier, que la science française a trop laissé jusqu'à présent dans l'oubli : je veux parler de Vandermonde.

Dans la figure, nous laisserons de côté, pour l'instant, les carrés ou *cases* numérotées **04, 40, 48, 84**, qui n'appartiennent pas au solitaire que l'on trouve le plus communément dans le commerce.

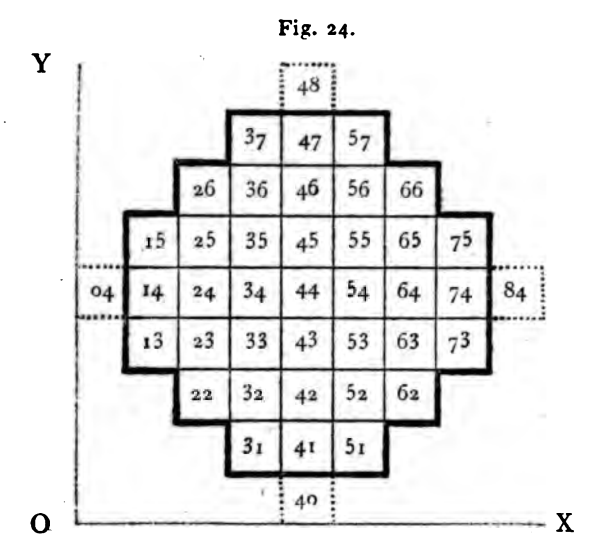
Nous appellerons *coins* du solitaire les cases numérotées, **13** et **31**, **15** et **51**, **37** et **73**, **57** et **75**; *milieux*, les cases numérotées, **14** et **41**, **26** et **62**, **47** et **74**, **22** et **66**; *fronts*, l'ensemble des trois cases contiguës, telles que **13**, **14**, **15**, ou **31**, **41**, **51**, ou **37**, **47**, **57**, ou **73**, **74**, **75**; *pourtour* ou périmètre, l'ensemble des coins et des milieux limitant le solitaire, et enfin *centre*, la case **44**.

Nous dirons que plusieurs cases sont *consécutives*, lorsqu'elles

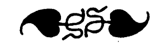
([1]) *Remarques sur les problèmes de situation*, par Vandermonde. — *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris* pour l'année 1771, p. 566-574. On trouve dans ce Mémoire une solution curieuse du problème du cavalier des échecs sur un échiquier cubique, et les premiers éléments scientifiques de la *géométrie des tissus à fils curvilignes*, qui comprend, en particulier, la fabrication des articles de bonneterie (tricots, bas, chaussettes, caleçons, bonnets de coton, etc.).

se succèdent sans interruption sur une même ligne horizontale ou sur une même colonne verticale; ainsi les cases **32**, **33**, **34**, **35** sont consécutives sur la même colonne. Dans ce cas, le premier chiffre de la notation des cases est le même, et le second chiffre représente les nombres entiers successifs; de même, les cases **23**,

Fig. 24.



33, **43**, **53** sont consécutives dans la même ligne; alors le second chiffre de la notation est constant, tandis que le premier chiffre représente les nombres entiers successifs. En général, nous désignerons le premier chiffre de la notation de la case, c'est-à- dire le rang de la colonne où elle se trouve par le mot *abscisse*, et le second chiffre de la notation de la case, c'est-à-dire le rang de la ligne où se trouve cette case, par le mot *ordonnée*.



RÈGLE DU JEU DU SOLITAIRE.

Lorsque le solitaire est entièrement couvert de boules, on commence par retirer l'une d'elles; cela fait, lorsque le solitaire présente une ou plusieurs cases vides, une boule quelconque peut *prendre* une autre boule qui lui est contiguë, dans le sens horizontal ou dans le sens vertical, lorsqu'en sautant par-dessus, soit horizontalement, soit verticalement, elle peut venir se placer, en continuant son mouvement, sur la case vide immédiatement voisine. Par exemple, la boule **34** peut prendre :

1°	La boule	**35**	en venant se placer sur la case vide		**36**;
2°	—	**33**	—	—	**32**;
3°	—	**24**	—	—	**14**;
4°	—	**44**	—	—	**54**.

Nous indiquerons cette manœuvre, que l'on appelle un *coup soustractif*, par une fraction ayant pour numérateur la case de départ de la boule qui prend, et pour dénominateur la case d'arrivée. Ainsi, pour chacun des quatre coups hypothétiques qui précèdent, la notation serait

$$\frac{34}{36},\ \frac{34}{32},\ \frac{34}{14},\ \frac{34}{54}.$$

On observera que, dans chacune de ces fractions qui représentent la notation d'un coup, les premiers ou les derniers chiffres diffèrent nécessairement de deux unités.

On peut se proposer sur le solitaire des problèmes très variés. Suivant la méthode analytique, nous commencerons par donner

la solution de quelques problèmes très simples qui feront mieux comprendre la règle du jeu.



PREMIERS EXERCICES.

Dans les Exercices suivants, on couvre de boules plusieurs cases du solitaire; il s'agit, en suivant la règle, de prendre toutes les boules, à l'exception d'une seule. Ces problèmes sont extraits, en très grande partie, d'un ouvrage ayant pour titre : *Recherches sur le jeu du solitaire*, livre posthume du chevalier Paul Busschopp, publié par les soins de son frère, Jules Busschopp. Nous avons d'ailleurs modifié la notation incommode de l'auteur, ainsi que l'ordre de ces exercices; mais nous avons conservé les titres de ces problèmes, qui sont basés, en général, sur la forme initiale ou finale de l'ensemble des boules qui couvrent le solitaire.

Le lecteur qui tient à se familiariser avec la pratique de ce jeu devra répéter ces exercices plusieurs fois, jusqu'à ce qu'il puisse les réaliser de mémoire.

Problème I. — La Croix de six boules. — On dispose six boules sur les cases **35, 43, 44, 45, 46, 55**; réduire à une boule au centre du solitaire.

On manœuvre successivement d'après la série des cinq coups :

$$\frac{45}{65}, \frac{43}{45}, \frac{35}{55}, \frac{65}{45}, \frac{46}{44}.$$

Problème II. — La Croix de neuf boules. — On dispose neuf boules sur les cases **24, 34, 42-46, 54, 64**; réduire à une boule au centre du solitaire.

La notation **42-46** veut dire que l'on place des boules sur les cases consécutives **42, 43, 44, 45, 46.** Pour abréger, nous nous servirons de cette notation tout aussi bien dans le sens vertical que dans le sens horizontal du solitaire. On a successivement

$$\frac{43}{41}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42}, \frac{64}{44}, \frac{41}{43}, \frac{43}{45}, \frac{46}{44}.$$

Problème III. — Le Triangle. — Neuf boules en : **23, 33, 34, 43-45, 53, 54, 63.**

$$\frac{53}{55}, \frac{55}{35}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43}, \frac{44}{42}, \frac{35}{33}, \frac{23}{43}, \frac{42}{44}.$$

Problème IV. — La Cheminée. — Onze boules en : **34-37, 45-47, 54-57.**

$$\frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{57}{37}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{46}{66}, \frac{54}{56}, \frac{66}{46}, \frac{46}{44}.$$

Problème V. — Le Calvaire. — Quinze boules en : **25, 31, 32, 35, 41-47, 51, 52, 55, 65.**

$$\frac{31}{33}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{41}{43}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43}.$$

Après six coups, on retrouve la Croix de neuf boules du *Problème* II. On observera que cette croix est déplacée, car le centre se trouve ici sur la case **45.** On terminera sur cette case.

Problème VI. — La Pyramide. — Seize boules en : **14, 24, 25, 34-36, 44-47, 54-56, 64, 65, 74.**

$$\frac{55}{53}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{55}{57}, \frac{57}{37}, \frac{35}{33}, \frac{14}{34}, \frac{33}{35}, \frac{36}{56}, \frac{44}{46}, \frac{56}{36}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{35}{55}, \frac{65}{45}.$$

Problème VII. — La double Croix. — Vingt et une boules en : **14, 22, 24, 26, 33-35, 41-47, 53-55, 62, 64, 66, 74.**

$\frac{54}{52}, \frac{52}{32}, \frac{22}{42}, \frac{33}{53}, \frac{41}{43}, \frac{43}{63}, \frac{74}{54}, \frac{62}{64}, \frac{45}{65}, \frac{54}{74}, \frac{66}{64}, \frac{74}{54}, \frac{35}{33}, \frac{54}{34}, \frac{33}{35}, \frac{47}{45}, \frac{45}{25}, \frac{14}{34}, \frac{26}{24}, \frac{24}{44}.$

Problème VIII. — Les cinq Croix entrelacées. — Vingt et une boules en : **14, 23-25, 32, 34, 36, 41-47, 52, 54, 56, 63-65, 74.**

$\frac{64}{62}, \frac{44}{64}, \frac{74}{54}, \frac{46}{66}, \frac{66}{64}, \frac{64}{44}, \frac{44}{46}, \frac{47}{45}, \frac{24}{26}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}, \frac{44}{24}, \frac{14}{34}, \frac{42}{22}, \frac{22}{24}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42}, \frac{41}{43}, \frac{62}{42}, \frac{42}{44}.$

Problème IX. — Le Pentagone. — Vingt-quatre boules en : **14, 23-25, 32-36, 42-47, 52-56, 63-65, 74.**

$\frac{53}{51}, \frac{32}{52}, \frac{51}{53}, \frac{44}{42}, \frac{23}{43}, \frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{25}{23}, \frac{45}{25}, \frac{43}{45}, \frac{55}{35}, \frac{35}{33}, \frac{33}{13}, \frac{13}{15}, \frac{15}{35}, \frac{35}{37}, \frac{37}{57}, \frac{57}{55}, \frac{55}{53}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{65}{45}, \frac{46}{44}.$

Problème X. — Le Carré incliné. — Vingt-quatre boules en : **14, 23-25, 32-36, 41-43, 45-47, 52-56, 63-65, 74.**

$\frac{53}{51}, \frac{51}{31}, \frac{55}{75}, \frac{75}{73}, \frac{73}{53}, \frac{64}{44}, \frac{35}{37}, \frac{37}{57}, \frac{57}{55}, \frac{55}{35}, \frac{34}{36}, \frac{46}{26}, \frac{14}{34}, \frac{26}{24}, \frac{23}{25}, \frac{44}{24}, \frac{25}{23}, \frac{32}{34}, \frac{53}{33}, \frac{34}{32}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{42}{44}.$

Problème XI. — L'Octogone. — Le solitaire est entièrement couvert, à l'exception des huit coins.

$\frac{53}{51}, \frac{32}{52}, \frac{51}{53}, \frac{54}{52}, \frac{74}{54}, \frac{44}{42}, \frac{52}{32}, \frac{22}{42}, \frac{41}{43}, \frac{24}{22}, \frac{43}{23}, \frac{22}{24}, \frac{62}{64}, \frac{64}{44}, \frac{34}{54},$
$\frac{14}{34}, \frac{66}{64}, \frac{64}{44}, \frac{56}{54}, \frac{35}{33}, \frac{54}{34}, \frac{33}{35}, \frac{35}{55}, \frac{47}{45}, \frac{55}{35}, \frac{25}{45}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}.$

Problème XII. — La triple Croix. — Le solitaire est entièrement couvert, à l'exception des cinq cases **22, 66, 26, 62** et **44.**

$\frac{42}{62}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{74}{54}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}, \frac{73}{53}, \frac{32}{52}, \frac{31}{51}, \frac{43}{63}, \frac{51}{53}, \frac{63}{43}, \frac{56}{54}, \frac{75}{55},$
$\frac{54}{56}, \frac{35}{55}, \frac{47}{45}, \frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{37}{35}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{15}{13}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \frac{32}{34}, \frac{24}{26},$
$\frac{34}{36}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}.$

Il y a aussi lieu de s'exercer à réussir ces problèmes en sens inverse, en modifiant la règle du jeu conformément à l'idée émise par Leibniz, et reproduite au début de cette récréation. Considérons trois cases consécutives A, B, C, soit dans le sens horizontal (*fig.* 25), soit dans le sens vertical (*fig.* 26).

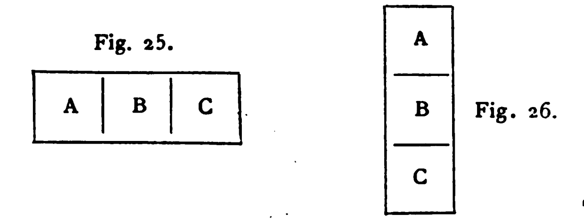


Fig. 25.
Fig. 26.

Supposons vides les cases B et C, et une boule en A. Passons la boule A en C, et plaçons une boule en B; nous aurons ainsi un *coup additif.* Cela posé, on pourra reprendre les problèmes précédents. On place une boule sur la case du solitaire, occupée par

la dernière boule, et dont le numéro est le dénominateur de la fraction qui représente le dernier coup. On opère par des coups additifs dont la lecture se fait : 1° en renversant les deux termes de chaque fraction ; 2° en renversant l'ordre des fractions, la dernière devenant la première.



PROBLÈMES SUR LE SOLITAIRE DÉCENTRÉ.

Dans les problèmes suivants, nous prendrons pour figure initiale le solitaire de trente-sept cases, entièrement couvert, à l'exception de la case centrale **44**. On doit, après un certain nombre de coups, obtenir des figures convenues, formées par les boules restantes. La première série de fractions indique le nombre et la suite des coups soustractifs ; nous indiquons ensuite la position des boules restantes par des chiffres gras ou par les désignations que nous avons définies plus haut.

Problème XIII. — LE CHAPELET.

$$\frac{64}{44}, \frac{62}{64}, \frac{42}{62}, \frac{22}{42}, \frac{24}{22}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{66}{46}, \frac{64}{66}, \frac{34}{54}, \frac{54}{52}, \frac{52}{32}, \frac{32}{34}, \frac{24}{44}.$$

Il reste le pourtour et les boules **35**, **43** à **46**, **55** formant la *Croix de six boules.*

Problème XIV. — L'ÉQUATEUR.

$$\frac{42}{44}, \frac{22}{42}, \frac{24}{22}, \frac{63}{43}, \frac{33}{53}, \frac{65}{63}, \frac{62}{64}, \frac{42}{62}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{34}{36}, \frac{55}{35}, \frac{36}{34}, \frac{53}{55}, \frac{56}{54}.$$

Il reste le pourtour et la ligne horizontale **14** à **74**.



Problème XV. — LA CROIX ET SA COURONNE.

$$\frac{24}{44}, \frac{36}{34}, \frac{55}{35}, \frac{25}{45}, \frac{33}{35}, \frac{53}{33}, \frac{23}{43}, \frac{56}{36}, \frac{36}{34}, \frac{73}{53}, \frac{65}{63}, \frac{53}{73}, \frac{51}{53}, \frac{32}{52}, \frac{53}{51}.$$

Il reste le pourtour et cinq boules au centre.

Problème XVI. — LA PLEINE LUNE.

$$\frac{64}{44}, \frac{52}{54}, \frac{33}{53}, \frac{54}{52}, \frac{66}{64}, \frac{46}{66}, \frac{44}{46}, \frac{24}{44}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{14}{34}, \frac{22}{24}, \frac{34}{14}, \frac{42}{22}, \frac{62}{42}, \frac{64}{62}.$$

Il reste le pourtour et les quatre boules **42, 44, 35, 55**.

Problème XVII. — LA CROIX DE MALTE.

$$\frac{24}{44}, \frac{54}{34}, \frac{74}{54}, \frac{42}{44}, \frac{44}{64}, \frac{46}{44}, \frac{34}{54}, \frac{54}{74}, \frac{62}{42}, \frac{63}{43}, \frac{32}{34}, \frac{22}{24}, \frac{25}{45}, \frac{26}{46}, \frac{56}{54}, \frac{66}{64}.$$

Il reste les boules des fronts, de la ligne et de la colonne moyennes, à l'exception du centre.

Problème XVIII. — QUATRE CAVALIERS CERNÉS PAR SEIZE SOLDATS.

$$\frac{42}{44}, \frac{45}{43}, \frac{64}{44}, \frac{43}{45}, \frac{66}{64}, \frac{46}{66}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}, \frac{24}{26}, \frac{44}{24}, \frac{22}{42}, \frac{24}{22}, \frac{41}{43}, \frac{62}{42}, \frac{43}{41}, \frac{64}{62}.$$

Il reste le pourtour et les quatre boules **33, 53, 35, 55** représentant les cavaliers, qui n'ont pas bougé pendant la manœuvre.

Problème XIX. — TROIS CAVALIERS CERNÉS PAR SEIZE SOLDATS.

$$\frac{64}{44}, \frac{34}{54}, \frac{42}{44}, \frac{44}{64}, \frac{36}{34}, \frac{56}{36}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}, \frac{65}{45}, \frac{24}{26}, \text{ etc.}$$

Les huit derniers coups sont semblables aux huit derniers du problème précédent. Il reste le pourtour et les trois boules **33, 53, 45** représentant les cavaliers.

Problème XX. — Adam et Ève dans le paradis terrestre.

$\frac{46}{44}, \frac{43}{45}, \frac{23}{43}, \frac{25}{23}, \frac{45}{25}, \frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{43}{45}, \frac{65}{63}, \frac{45}{65}, \frac{22}{42}, \frac{26}{24}, \frac{66}{46}, \frac{62}{64}, \frac{42}{62}, \frac{24}{22}, \frac{46}{26}, \frac{64}{66}.$

Il reste le pourtour et les deux boules **34** et **54**, représentant Adam et Ève, qui n'ont pas bougé pendant la manœuvre.

Problème XXI. — Le Lecteur au milieu de son auditoire. — On commence par le problème du chapelet (*Problème* XIII), et l'on termine par le *Problème* I. Il reste alors le pourtour et le centre.

Problème XXII. — Le Jugement dernier.

$\frac{24}{44}, \frac{32}{34}, \frac{52}{32}, \frac{35}{33}, \frac{32}{34}, \frac{55}{35}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{63}{65}, \frac{43}{63}, \frac{36}{56}, \frac{35}{55}, \frac{55}{57}, \frac{13}{33}, \frac{15}{13}, \frac{33}{35}, \frac{35}{15}, \frac{73}{53}, \frac{75}{73}, \frac{53}{55}, \frac{55}{75}.$

Après le dernier coup, il reste la boule centrale **44** et les deux parties du pourtour, représentant les *bons et les méchants*, séparés par les cases vides **14** et **74**.

Problème XXIII. — Le grand Bol.

$\frac{24}{44}, \frac{32}{34}, \frac{53}{33}, \frac{34}{32}, \frac{31}{33}, \frac{52}{32}, \frac{33}{31}, \frac{45}{43}, \frac{64}{44}, \frac{43}{45}, \frac{56}{54}, \frac{35}{55}, \frac{54}{56}, \frac{66}{64}, \frac{63}{65}, \frac{26}{24}, \frac{23}{25}, \frac{37}{35}, \frac{47}{45}, \frac{57}{55}.$

Il reste la ligne **15** à **75**, et le pourtour de **15** à **41** et de **41** à **75**.

Problème XXIV. — LES QUATRE ÉVANGÉLISTES ET LES DOUZE APÔTRES.

$\frac{42}{44}, \frac{62}{42}, \frac{64}{62}, \frac{44}{64}, \frac{41}{43}, \frac{74}{54}, \frac{46}{44}, \frac{44}{64}, \frac{66}{46}, \frac{64}{66}, \frac{47}{45}, \frac{24}{44}, \frac{44}{46}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{14}{34}, \frac{22}{24}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42}, \frac{42}{22}.$

Il reste les boules du pourtour, à l'exception des quatre boules **14, 41, 47, 74**, ce qui représente les douze Apôtres, et en plus les boules **33, 35, 53, 55**, qui représentent les Évangélistes.

Problème XXV. — LA TRINITÉ ET LES DOUZE APÔTRES.

$\frac{42}{44}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{43}{45}, \frac{64}{44}, \frac{56}{54}, \frac{54}{34}, \frac{36}{56}, \frac{34}{36}, \frac{15}{35}, \frac{57}{55}, \frac{37}{57}, \frac{35}{37}, \frac{13}{15}, \frac{33}{13}, \frac{31}{33}, \frac{51}{31}, \frac{53}{51}, \frac{73}{53}, \frac{75}{73}, \frac{55}{75}.$

Il reste douze boules du pourtour, comme dans le problème précédent, et, en plus, les trois boules **33, 53, 45**.

Problème XXVI. — JÉSUS ET LES DOUZE APÔTRES.

$\frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{31}{51}, \frac{33}{31}, \frac{53}{33}, \frac{23}{43}, \frac{35}{33}, \frac{33}{53}, \frac{14}{34}, \frac{44}{24}, \frac{46}{44}, \frac{26}{46}, \frac{24}{26}, \frac{47}{45}, \frac{66}{46}, \frac{54}{56}, \frac{46}{66}, \frac{74}{54}, \frac{75}{55}, \frac{45}{65}, \frac{53}{55}, \frac{55}{75}.$

Il reste douze boules du pourtour, comme dans les deux problèmes précédents, et, en plus, la boule centrale **44**.

Problème XXVII. — LE CALICE.

$\frac{46}{44}, \frac{65}{45}, \frac{57}{55}, \frac{37}{57}, \frac{54}{56}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{34}{32}, \frac{36}{34}, \frac{15}{35}, \frac{22}{42}, \frac{13}{33}, \frac{34}{32}, \frac{14}{34}, \frac{75}{55}, \frac{55}{53}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{73}{53}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{62}{42}.$

Il reste douze boules **26, 31, 34, 35, 41-44, 51, 54, 55, 66.**

Problème XXVIII. — La Trinité.

$$\frac{46}{44}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{26}{46}, \frac{54}{34}, \frac{65}{45}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \frac{74}{54}, \frac{54}{56}, \frac{47}{45},$$
$$\frac{66}{46}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{34}{32}, \frac{14}{34}, \frac{62}{42}, \frac{42}{44}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{22}{42}, \frac{13}{33}, \frac{34}{32}, \frac{45}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23},$$
$$\frac{41}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}.$$

Il reste les trois boules **23, 63** et **46.**

Problème XXIX. — Les deux Pôles. — On joue vingt coups comme dans le problème précédent, puis on fait :

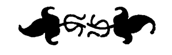
$$\frac{45}{47}, \frac{73}{53}, \frac{62}{42}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{53}{33}, \frac{41}{43}, \frac{22}{42}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{43}{41}.$$

Il reste alors les deux boules **41** et **47.**

Problème XXX. — Le Corsaire. — On couvre le solitaire, on enlève la boule **51,** on fait ensuite :

$$\frac{53}{51}, \frac{73}{53}, \frac{65}{63}, \frac{62}{64}, \frac{75}{73}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{73}{53}, \frac{23}{43}, \frac{25}{23}, \frac{45}{25}, \frac{47}{45}, \frac{31}{33}, \frac{33}{35},$$
$$\frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{22}{24}, \frac{14}{34}, \frac{35}{33}, \frac{15}{35}, \frac{45}{25}, \frac{26}{24}, \frac{37}{35}, \frac{66}{46}.$$

Puis la boule **41,** qui représente le Corsaire, prend successivement les neuf boules **42, 33, 24, 35, 55, 64, 53, 44, 46,** et vient se placer en **47,** où elle est prise par la boule **57** qui vient en **37.**



LES LETTRES EN BOULES.

Nous venons de donner les solutions de trente problèmes gradués sur le jeu du solitaire. Il paraît que l'ouvrier typographe chargé de la composition de l'article publié dans la *Revue Scientifique* n'était pas très content d'avoir à manier une si grande quantité de chiffres et de fractions. Ce n'était pas l'avis de mon fils Paul, qui n'a pas six ans, mais qui sait manipuler les numéros avec une grande dextérité; il y a déjà longtemps qu'il ne joue plus au loto, d'abord parce que c'est un jeu de hasard, ensuite parce que ce jeu est ennuyeux. C'est lui qui a corrigé les épreuves de l'article en question, assisté de sa grande sœur Madeleine, qui n'a pas sept ans. J'avais dessiné sur une feuille de carton un solitaire numéroté; puis j'avais expliqué à tous deux les notations si simples du jeu du solitaire. Pendant que l'un appelait les coups successifs, l'autre les réalisait sur l'échiquier; je n'ai donc eu à revoir qu'un petit nombre de problèmes, c'est-à-dire seulement ceux qui les avaient arrêtés.

Aussi, pour les récompenser, je leur ai promis d'écrire leurs noms en *lettres de boules* sur le jeu du solitaire; dans cette intention, j'ai réuni quelques nouveaux problèmes que l'on déduit du solitaire complet, et qui se terminent par un ensemble de boules représentant aussi bien que possible les lettres de l'alphabet qui servent à former leurs noms.



LA RÉCRÉATION DE PAUL [1].

Cette récréation se compose de quatre parties successives qui correspondent aux quatre lettres P, A, U, L.

La lettre P. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**; puis on joue les vingt-trois coups suivants :

$\frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}, \frac{41}{43}, \frac{74}{54}, \frac{33}{53}, \frac{54}{52}, \frac{22}{42}, \frac{52}{32}, \frac{56}{54}, \frac{36}{56}, \frac{34}{36}, \frac{75}{55}, \frac{45}{65}, \frac{13}{33}, \frac{14}{34}, \frac{15}{35}, \frac{26}{46}, \frac{56}{36}.$

Il reste les treize boules **31-37, 44, 47, 54, 57, 65, 66.**

La lettre A. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**; puis on joue les vingt-six coups suivants :

$\frac{64}{44}, \frac{56}{54}, \frac{35}{55}, \frac{54}{56}, \frac{66}{64}, \frac{57}{55}, \frac{47}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{65}, \frac{34}{36}, \frac{26}{46}, \frac{15}{35}, \frac{75}{55}, \frac{14}{34}, \frac{74}{54}, \frac{22}{24}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{53}{33}, \frac{41}{43}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{62}{64}.$

Il reste les dix boules **13,73,24-64,35,55,46.**

La lettre U. — Du solitaire complet on enlève la boule **64**; puis on joue les vingt-quatre coups suivants :

$\frac{66}{64}, \frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{47}{45}, \frac{54}{56}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{34}{32}, \frac{75}{55}, \frac{73}{53}, \frac{62}{42}, \frac{54}{52}, \frac{74}{54}, \frac{51}{53}, \frac{32}{52}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{45}{43}, \frac{15}{13}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}.$

[1] Nous recommandons ces exercices aux pères de famille qui n'ont malheureusement pas toujours le temps d'être dérangés de leurs travaux par leurs enfants.

Il reste les douze boules **22-26, 31, 41, 52-56.**

La lettre L.— Du solitaire complet on enlève la boule **33**; puis on joue les vingt-sept coups suivants :

$\frac{31}{33}, \frac{34}{32}, \frac{51}{31}, \frac{31}{33}, \frac{36}{34}, \frac{34}{32}, \frac{56}{36}, \frac{54}{56}, \frac{52}{54}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{74}{54}, \frac{57}{55}, \frac{54}{56},$
$\frac{66}{46}, \frac{75}{55}, \frac{55}{35}, \frac{43}{45}, \frac{36}{34}, \frac{15}{35}, \frac{13}{15}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{47}{45}, \frac{45}{25}.$

Il reste les neuf boules **22-26, 32-62.**



LA RÉCRÉATION DE MADELEINE.

Cette récréation se compose de cinq parties nouvelles qui correspondent aux lettres M, D, E, I, N.

La lettre M. — Du solitaire complet on enlève les boules **33** et **53**; puis on joue les vingt-deux coups suivants :

$\frac{55}{53}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{35}{33}, \frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{41}{43}, \frac{15}{13}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23},$
$\frac{75}{55}, \frac{73}{75}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \frac{47}{45}, \frac{45}{65}, \frac{37}{35}, \frac{57}{55}.$

Il reste les treize boules **22-26, 35, 44, 55, 62-66.**

La lettre D. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**, puis on joue les vingt coups suivants :

$\frac{42}{44}, \frac{23}{43}, \frac{35}{33}, \frac{43}{23}, \frac{54}{34}, \frac{46}{44}, \frac{34}{54}, \frac{65}{45}, \frac{63}{65}, \frac{75}{55}, \frac{45}{65}, \frac{53}{55}, \frac{55}{75}, \frac{22}{42},$
$\frac{52}{32}, \frac{13}{33}, \frac{14}{34}, \frac{15}{35}, \frac{26}{46}, \frac{56}{36}.$

Il reste les seize boules **31-37, 41, 47, 51, 57, 62, 66, 73-75.**

La lettre E. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**; puis on joue les vingt-trois coups suivants :

$\frac{42}{44}, \frac{62}{42}, \frac{54}{52}, \frac{73}{53}, \frac{52}{54}, \frac{41}{43}, \frac{22}{42}, \frac{43}{41}, \frac{34}{32}, \frac{54}{34}, \frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{74}{54}, \frac{46}{44}, \frac{26}{46}, \frac{34}{36}, \frac{13}{33}, \frac{14}{34}, \frac{15}{35}, \frac{47}{45}, \frac{66}{46}, \frac{45}{47}.$

Il reste les treize boules **31-37, 41, 44, 47, 51, 54, 57.**

La lettre I. — Du solitaire complet on enlève les boules **13** et **73**; puis on joue les vingt-quatre coups suivants :

$\frac{75}{73}, \frac{54}{74}, \frac{66}{64}, \frac{74}{54}, \frac{15}{13}, \frac{34}{14}, \frac{26}{24}, \frac{14}{34}, \frac{46}{66}, \frac{54}{56}, \frac{66}{46}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{34}{32}, \frac{36}{34}, \frac{13}{33}, \frac{22}{42}, \frac{34}{32}, \frac{51}{53}, \frac{32}{52}, \frac{53}{51}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}.$

Il reste les onze boules **31, 37, 41-47, 51, 57.**

La lettre N. — Du solitaire complet on enlève les boules **52** et **33**; puis on joue les vingt-deux coups suivants :

$\frac{54}{52}, \frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{47}{45}, \frac{73}{75}, \frac{75}{55}, \frac{45}{65}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{15}{13}, \frac{13}{33}, \frac{33}{35}, \frac{31}{33}, \frac{41}{43}, \frac{43}{23}, \frac{51}{53}.$

Il reste les treize boules **22-26, 35, 44, 53, 62-66.**



LES RÉUSSITES DU SOLITAIRE A 37 CASES.

Le problème que l'on résout le plus communément sur le solitaire s'appelle *réussite;* il consiste à enlever une boule du solitaire complet, puis on doit réduire le solitaire à une seule boule, en suivant la règle du jeu. Nous désignerons alors sous le nom de *case initiale* la première et unique case vide, et par *case finale* ou *terminale* la dernière et unique case pleine. Nous avons déjà obtenu la réussite ayant **51** pour case initiale et **37** pour case finale, dans la solution du problème du *Corsaire.* Nous donnerons une seconde réussite, en partant de la case **73**; le tableau successif des trente-cinq coups est le suivant :

$$\frac{53}{73}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{73}{53}, \frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \frac{45}{43}, \frac{65}{45}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65},$$

$$\frac{75}{55}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \frac{43}{63}, \frac{64}{44}, \frac{62}{64}, \frac{74}{54}, \frac{41}{43}, \frac{34}{36}, \frac{14}{34},$$

$$\frac{47}{45}, \frac{26}{46}, \frac{45}{47}, \frac{54}{56}, \frac{66}{46}, \frac{43}{23}, \frac{22}{24}, \frac{47}{45}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42} \text{ ou } \frac{43}{45}.$$

On retient assez facilement cette marche en se fixant dans l'esprit les figures représentant l'état du solitaire après le 17e coup, et après le 26e.

Quant au dernier coup, il est possible de deux façons différentes, et la *case finale* est **42** dans le premier cas, et **45** dans le second. Cette observation sera très utile dans la suite.



DE LA SYMÉTRIE HORIZONTALE.

Au lieu de prendre 73 pour case initiale, on pourrait prendre une autre case, et il y aurait ainsi lieu de considérer les réussites qui correspondent à toutes les cases du solitaire, prises successivement pour case initiale. Mais la forme régulière du solitaire permet de réduire considérablement ces problèmes, ainsi qu'on va le voir.

Si l'on prend 75 pour case initiale, on observera que les cases 73 et 75 sont placées symétriquement par rapport à la ligne moyenne 14-74 qui est un *axe de symétrie* de la figure formée par les cases du solitaire. Dans le cas général, les premiers chiffres des notations de deux cases symétriques par rapport à la ligne moyenne sont égaux; ainsi les cases symétriques 73 et 75, 32 et 36, etc., ont le même premier chiffre. Quant aux seconds chiffres, ils ont constamment la même somme égale à *huit*.

Par conséquent, pour résoudre le problème de la réussite, qui convient à la case initiale 75, il suffira de reprendre le tableau précédent, en conservant l'ordre et la disposition des fractions; on conservera encore le premier chiffre de chacun des termes de la fraction, mais on remplacera le second chiffre de chaque terme par son complément à 8; ainsi, pour le second chiffre, on remplacera

1 par 7, 2 par 6, 3 par 5, 4 par 4,

et réciproquement. Le tableau des premiers coups de la réussite 75 sera donc

$$\frac{55}{75}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \ldots$$

DE LA SYMÉTRIE VERTICALE.

Le solitaire est encore symétrique par rapport à la colonne moyenne 41-47; et ainsi les cases 13 et 73 sont symétriques. Pour deux telles cases, le second chiffre de la notation est le même, et la somme des deux premiers chiffres est constamment égale à *huit*. Par conséquent, on déduira le tableau de la réussite 13 de celui de la réussite 73, en conservant l'ordre des fractions donnant les coups et le second chiffre des termes, et en remplaçant le premier chiffre de chaque terme par son complément à *huit*. Ainsi, par exemple, la réussite de case initiale 13 commence par

$$\frac{33}{13}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \ldots$$

DE LA SYMÉTRIE CENTRALE.

On peut déduire la solution de la réussite de case initiale 15 de l'une des réussites ayant pour case initiale 13 ou 75, soit par symétrie horizontale, soit par symétrie verticale. Mais on peut opérer plus rapidement, en remplaçant, dans le tableau de la succession des coups de la réussite de case initiale 73, chacun des chiffres par son complément à *huit*. On fait ainsi l'application de ce théorème de Géométrie : *Lorsqu'une figure est symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires, elle est symétrique par rapport au point d'intersection des axes.* Ainsi le solitaire possède la *symétrie centrale*, c'est-à-dire que toutes les cases sont opposées deux à deux, et également distantes de la case

centrale **44** (¹). Ainsi, les premiers coups de la réussite **15** déduits centralement de la réussite **73** sont les suivants :

$$\frac{35}{15}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \cdots$$



DE LA SYMÉTRIE INCLINÉE.

Les cases du solitaire octogone sont encore placées symétriquement par rapport à la ligne diagonale **22-66**. Pour deux cases symétriques de cette manière, les notations sont telles que chacune d'elles est égale à la notation renversée de l'autre. Par conséquent, on déduira la solution de la réussite **37** de celle de la réussite **73**, en renversant l'ordre des chiffres de chacun des termes des fractions qui indiquent la succession des coups.

Ainsi les premiers coups de la réussite **37** déduits de la réussite **73** sont :

$$\frac{35}{37}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \cdots$$

En résumé, il résulte de ces considérations de symétrie, que l'étude des réussites du solitaire de trente-sept cases ne doit être faite que pour une seule des cases d'un même groupe symétrique.

(¹) Pour se rapprocher des conventions adoptées en Géométrie analytique, on aurait dû désigner la case **44** par **00**, et la prendre pour origine des coordonnées. On aurait désigné toutes les cases par deux chiffres, de **0** à **3**, en indiquant les cases de coordonnées négatives par le signe —, placé au-dessus du chiffre représentant la coordonnée négative, comme dans l'emploi de la carastéristique négative des logarithmes. On peut encore désigner les coordonnées négatives par des chiffres accentués ; c'est ainsi que l'a fait Reiss, dans le Mémoire que nous citons plus loin. Mais sa notation est un peu confuse ; c'est pourquoi nous préférons la notation actuelle.

D'après cela, on classera les cases du solitaire en huit groupes que nous indiquons dans le tableau suivant :

Tableau des groupes de cases symétriques.

GROUPES.	CASES.
I*	44.
II*	14, 41, 47, 74.
III*	22, 26, 62, 66.
IV	24, 42, 46, 64.
V*	33, 35, 53, 55.
VI	34, 43, 45, 54.
VII	13, 15, 31, 37, 51, 57, 73, 75.
VIII*	23, 25, 32, 36, 52, 56, 63, 65.

Il suffit donc d'étudier le problème des réussites pour l'une quelconque des cases de chaque groupe. Mais nous démontrerons plus loin, dans la théorie des *impossibilités du solitaire général*, que la réussite proposée est impossible pour toutes les cases appartenant aux groupes marqués d'un astérisque, dans le tableau précédent. Il ne nous reste donc que l'étude des groupes IV et VI, dans lesquels nous choisirons respectivement pour cases initiales celles qui ont pour notation 42 et 45.



PROCÉDÉ GÉNÉRAL DE RÉCIPROCITÉ.

Nous avons donné plus haut la solution du solitaire pour la case initiale **73**, et nous avons obtenu la boule finale **42**. Par conséquent on peut, par une marche renversée de coups *additifs*, remplir le solitaire, en prenant pour case initiale **42**, mais la case finale **73** restera vide. Nous avons vu que l'on obtient l'écriture de cette solution en coups additifs : 1° en renversant l'ordre des fractions ; 2° en échangeant les termes de chaque fraction.

Cela posé, considérons deux *solitaires complémentaires*, c'est-à-dire tels que les cases *pleines* de l'un correspondent toujours aux cases *vides* de l'autre, et réciproquement ; alors les coups *additifs* de l'un correspondent aux coups *soustractifs* de l'autre.

Par conséquent, si l'on part d'une boule initiale **42**, et qu'on remplisse le solitaire par coups additifs, à l'exception de la case **73**, on obtient une réussite ordinaire, par coups soustractifs, sur le solitaire complémentaire ne contenant que la case vide **42** ; il reste la boule finale **73**.

Pour déduire immédiatement la réussite de case initiale **42** et de boule finale **73**, de la réussite de case initiale **73** et de boule finale **42**, il suffit de renverser, dans la solution de cette dernière, l'ordre des fractions, mais *sans renverser* les termes de chacune d'elles. Ainsi, la réussite de case initiale **42**, déduite de la réussite **73**, sera

$$\frac{44}{42}, \frac{24}{44}, \frac{45}{43}, \frac{47}{45}, \ldots, \frac{51}{53}, \frac{53}{73}.$$

C'est en cela que consiste le *procédé général de réciprocité.*



PROCÉDÉ GÉNÉRAL D'ÉCHANGE.

Nous avons vu que la réussite de case initiale **73** peut se terminer indifféremment par la case **42** ou par la case **45**. Par conséquent, la réussite de case initiale **45** a pour solution

$$\frac{43}{45}, \frac{24}{44}, \frac{45}{43}, \frac{47}{45}, \ldots, \frac{51}{53}, \frac{53}{73}.$$

Elle ne diffère de la précédente que par le premier coup.

En général, désignons par a, b, c, d quatre cases consécutives, et supposons que la réussite se termine par le coup $\frac{c}{a}$; on pourra tout aussi bien terminer par le coup $\frac{b}{d}$. De même, si une réussite commence par le coup $\frac{C}{A}$, sur l'ensemble de quatre cases consécutives A, B, C, D, on pourra échanger la case A par la case D, et la réussite ne différera de la précédente que par le premier coup $\frac{B}{D}$, au lieu de $\frac{C}{A}$. C'est en cela que consiste le *procédé général d'échange* des cases initiales ou des cases terminales.

Il résulte de ces considérations de symétrie, de réciprocité et d'échange, que nous avons donné les réussites possibles du solitaire de trente-sept cases, en prenant successivement pour case initiale toutes les cases convenables.



COUPS TRIPLES DU SOLITAIRE ACCÉLÉRÉ.

On peut, dans un grand nombre de problèmes, accélérer la marche du solitaire par le *coup triple* imaginé par M. Hermary.

Considérons l'ensemble formé par trois cases consécutives pleines B, C, D, et par deux autres cases A et A', dont l'une pleine et l'autre vide, conformément à l'une des quatre dispositions que nous avons représentées dans les *fig.* 27, 28, 29 et 30.

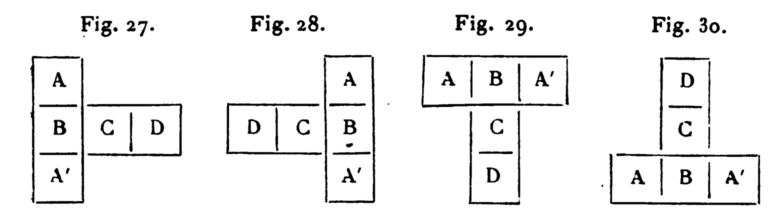


Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.

Si la case A' est vide et les quatre autres pleines, on fera successivement les trois coups

$$\frac{A}{A'}, \frac{D}{B}, \frac{A'}{A};$$

si la case A est vide, et les quatre autres pleines, on fera

$$\frac{A'}{A}, \frac{D}{B}, \frac{A}{A'}.$$

Dans ces deux cas, les trois boules consécutives B, C, D ont disparu, pendant que la quatrième est revenue à sa place. On peut effectuer cette manœuvre d'un seul coup, en enlevant les trois boules B, C, D, sans toucher à A ou à A'. Nous désignerons ce coup triple par l'une des fractions $\frac{B}{D}$ ou $\frac{D}{B}$, mais en chiffres gras. Nous donnerons quelques exemples de ce procédé.

Exemple I. — *Marche accélérée du Lecteur au milieu de son auditoire.* — On enlève d'abord du solitaire complet la boule centrale **44**, et par un coup simple $\frac{64}{44}$, on enlève la boule **54**; on

effectue ensuite les six coups triples :

$$\frac{43}{63}, \frac{45}{65}, \frac{32}{52}, \frac{36}{56}, \frac{33}{35}, \frac{23}{25}.$$

Comparer cette solution, due à M. Hermary, avec celle que nous avons donnée dans le *Problème* XXI.

Exemple II. — *Marche accélérée des douze Apôtres.* — On enlève la boule centrale **44**, puis on fait les huit coups triples :

$$\frac{34}{36}, \frac{24}{26}, \frac{45}{65}, \frac{46}{66}, \frac{54}{52}, \frac{64}{62}, \frac{43}{23}, \frac{42}{22}.$$

Exemple III. — *Le Carré de vingt-cinq boules.* — On dispose sur le solitaire vingt-cinq boules en carré ayant pour sommets les cases **22**, **26**, **62**, **66**.

On réduit la figure à une seule boule au centre par les huit coups triples :

$$\frac{24}{26}, \frac{34}{36}, \frac{46}{66}, \frac{45}{65}, \frac{64}{62}, \frac{54}{52}, \frac{42}{22}, \frac{43}{23}.$$

Cette marche est peu différente de la précédente; chaque paire de coups triples est intervertie.

Exemple IV. — *Le Tricolet.* — Du solitaire complet on enlève la boule 44; puis on fait successivement quatre groupes de coups superposables, en tournant à chaque fois le solitaire d'un quart de tour; ces groupes sont formés d'un coup triple, marqué d'un astérisque, suivi de deux coups simples :

$$\frac{25^*}{45}, \frac{47}{45}, \frac{26}{46}; \frac{32^*}{34}, \frac{14}{34}, \frac{22}{24}; \frac{63^*}{43}, \frac{41}{43}, \frac{62}{42}; \frac{56^*}{54}, \frac{74}{54}, \frac{66}{64}.$$

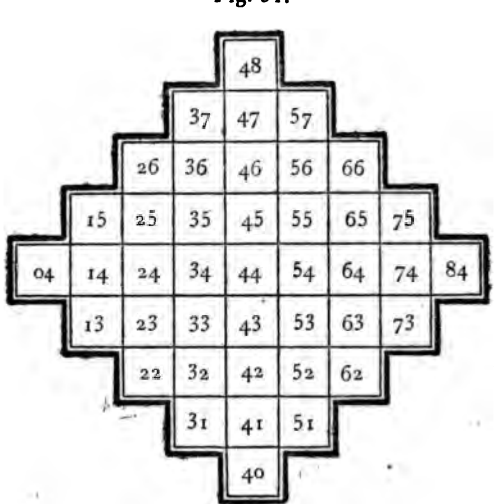
Il reste seize boules que l'on ramène à douze en jouant les quatre coups simples

$$\frac{45}{47},\ \frac{34}{14},\ \frac{43}{41},\ \frac{54}{74}\ (^1).$$

EXEMPLE V. — *Réussite sur le solitaire de quarante et une cases.*

Le solitaire de quarante et une cases a la forme représentée dans la *fig.* 31.

Fig. 31.



C'est le solitaire ordinaire bordé des quatre cases **04**, **40**, **48** et **84**. Nous donnerons le tableau des coups de la réussite que l'on obtient en prenant **46** pour case initiale. Ce tableau renferme un

(1) *Encyclopédie méthodique. — Dictionnaire des jeux mathématiques.* Paris, an VII, p. 202.

mélange de coups simples et de coups triples :

$\frac{66}{46}, \frac{54}{56}, \frac{75}{55}, \frac{\mathbf{55^*}}{\mathbf{57}}, \frac{\mathbf{46^*}}{\mathbf{48}}, \frac{\mathbf{64^*}}{\mathbf{84}}, \frac{34}{54}, \frac{\mathbf{15^*}}{\mathbf{35}}, \frac{\mathbf{04^*}}{\mathbf{24}}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{26}{24}, \frac{23}{25}, \frac{43}{23}, \frac{22}{24},$
$\frac{25}{23}, \frac{13}{33}, \frac{\mathbf{51^*}}{\mathbf{53}}, \frac{41}{43}, \frac{\mathbf{31^*}}{\mathbf{33}}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}, \frac{43}{41}, \frac{40}{42}.$

Cette réussite est due à M. Hermary.

Remarque. — Dans les solutions des trente premiers problèmes, on rencontre un assez grand nombre de coups triples. Ainsi dans le *grand Bol* (*Prob.* XXIII), le premier coup est suivi de quatre coups triples.



EXTENSIONS DU SOLITAIRE ET DE LA RÈGLE DU JEU.

Pour démontrer l'impossibilité de certains problèmes du solitaire, tels que les réussites, on se sert d'un procédé fort ingénieux, imaginé par Reiss, et perfectionné par M. Hermary (¹). On facilite le jeu : 1° par l'extension de la règle ordinaire; 2° par l'extension indéfinie des limites du solitaire; on prouve ensuite

(¹) Reiss. — Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels (*Journal de Crelle*, t. LIV. Berlin).

Ruchonnet. — *Théorie du Solitaire*, par feu le Dʳ Reiss; librement traduit de l'allemand (*Nouvelle correspondance mathématique*, t. III, p. 234. Bruxelles, 1877).

Hermary. — *Sur le jeu du Solitaire*. Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Montpellier, 1879.

Nous pensons que ce procédé appartient réellement au docteur Reiss ; cependant nous devons dire que la théorie des impossibilités du solitaire a des origines beaucoup plus anciennes. En effet, dans le tome Iᵉʳ du *Bulletin des Sciences* de Férussac (p. 137), on trouve le passage suivant, qui correspond à une autre notation du solitaire : « Si, dans le solitaire octogone

que, même dans ce cas plus général, tout en profitant de la règle étendue, le problème proposé n'est pas possible. Par conséquent le problème proposé sera impossible, à plus forte raison, dans le cas du solitaire restreint.

EXTENSION I. — Le solitaire est supposé indéfini dans tous les sens.

EXTENSION II. — On a la faculté de jouer successivement, et dans un ordre quelconque, des coups additifs et soustractifs.

EXTENSION III. — On peut placer plusieurs boules à la fois, sur la même case, par des coups additifs. Si l'on veut suivre le raisonnement, *la boule à la main*, il suffira de prendre un carton quadrillé, ainsi que nous l'avons déjà dit, et des pions comme ceux que l'on emploie au jeu de dames.

EXTENSION IV. — Une case vide peut être garnie par provision d'une ou de plusieurs boules en nombre quelconque; en d'autres termes, une case vide peut emprunter des boules, directement, sans l'intermédiaire des coups additifs, à la condition de pouvoir les rendre à la fin de la partie.

Ainsi on peut, par exemple, sur une case vide placer une boule directement, continuer l'application des coups additifs ou soustractifs, et retirer ensuite, après la manœuvre, la boule ajoutée quand elle est revenue sur cette case [1].

à 37 fiches, pour commencer on laisse vide l'un des trous 2, 4, 14, 20, 32, il est impossible que la dernière fiche reste dans l'un d'eux. »

Ce théorème paraît être une conséquence des théorèmes VII, VIII, IX et X, que nous démontrons plus loin. Il est extrait d'un ouvrage que nous n'avons pas eu le loisir de consulter, et intitulé : *Natürliche Magazine*, de Christ Benedict Funck. Berlin, 1783; in-8°.

[1] Cette extension revient à supposer, dans certains cas, un nombre négatif de boules. Cela revient encore à supposer le solitaire placé sur une pile de solitaires indéfinis et entièrement garnis.

Nous désignerons cette règle du jeu, que nous avons à considérer pour les besoins de la théorie, sous le nom de *règle complète*, et la règle ordinaire sous le nom de *règle restreinte.* Toute solution déduite de la règle complète sera dite *solution théorique,* et toute solution déduite de la règle restreinte sera dite *solution pratique.*



DES POSITIONS ET DES CASES CONGRUENTES.

Nous dirons que deux positions de boules sur le solitaire indéfini sont *congruentes* lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par les divers systèmes de coups qui résultent de l'emploi de la règle complète. Nous allons d'abord montrer l'effet de la règle complète sur un certain nombre de positions, par une marche accélérée, analogue à celle des coups triples.

Théorème I. — *On peut toujours enlever trois boules situées sur trois cases consécutives.*

En effet, il suffit de se reporter à la marche du coup triple ordinaire. La règle ordinaire suppose vide l'une des cases A et A′, et l'autre pleine; mais par les extensions III et IV, les deux conditions précédentes ne sont plus nécessaires; ces deux cases peuvent être, en même temps, vides ou remplies; nous avons alors le *coup triple théorique.*

Théorème II. — *On peut toujours enlever ou ajouter deux boules, ou un nombre pair de boules sur une case quelconque* C.

En effet, considérons trois cases consécutives B, C, D; nous pouvons jouer, même lorsque les cases B et D sont vides, par

l'extension IV, les deux coups soustractifs $\frac{B}{D}$, $\frac{D}{B}$; l'état des cases B et D n'a pas changé, mais la case C possède deux boules de moins. Par deux coups additifs, on peut ajouter deux boules sur la case C.

THÉORÈME III. — *On peut toujours faire franchir à une boule quelconque deux cases consécutives dans un sens quelconque, soit sur une ligne ou sur une colonne.*

En effet, considérons quatre cases consécutives A, B, C, D, situées sur la même ligne, ou sur la même colonne, et une boule en A. Par un coup additif de A en C, et par un coup soustractif de B en D, on amène une boule de A en D, sans modifier l'état des cases B et C.

En répétant plusieurs fois la même opération, on peut déplacer une boule sur des cases A, D, ..., en franchissant chaque fois deux cases consécutives. Toutes les cases séparées par deux cases consécutives seront dites *congruentes*, et l'on peut porter les boules d'une case dans l'une de ses congruentes (¹).



EFFETS SUCCESSIFS DE LA RÈGLE COMPLÈTE.

Si l'on se reporte aux généralisations indiquées dans les extensions III et IV, on observera facilement qu'un coup quelconque

(¹) Si (x, y) et (x', y') désignent les coordonnées de deux cases congruentes, les différences $x - x'$ et $y - y'$ sont simultanément des multiples de trois. En arithmétique, cette relation s'écrit ainsi :

$$x \equiv x', \quad (\text{Mod. } 3).$$
$$y \equiv y', \quad (\text{Mod. } 3).$$



additif ou soustractif de la règle complète a pour effet de changer la parité du nombre de boules situées sur trois cases consécutives. En d'autres termes, les nombres de boules situées sur les trois cases varient d'une unité dans un sens ou dans l'autre [1].



RÉSIDU CONGRUENT SUR UN CARRÉ DE NEUF CASES.

Par l'application de la règle complète, on peut démontrer le théorème suivant, qui est le fondement de la théorie du docteur Reiss.

THÉORÈME IV. — *Quelle que soit la position des boules du solitaire indéfini, on peut toujours réunir toutes ces boules dans un carré formé par neuf cases contiguës et choisi arbitrairement.*

En effet, sur l'étendue du solitaire indéfini, prenons arbitrairement un carré de neuf cases contiguës; on peut déplacer une boule quelconque du solitaire (THÉORÈME III), de trois en trois rangs, dans le sens horizontal, jusqu'à ce qu'elle se trouve sur une colonne ou sur le prolongement d'une colonne du carré choisi; cela fait, on peut ensuite déplacer cette boule de trois en trois rangs, dans le sens vertical, jusqu'à ce qu'on l'amène sur une des

[1] Si (a, b, c) et (a', b', c') désignent les nombres de boules situées sur trois cases consécutives A, B, C, avant ou après un coup additif ou soustractif portant sur ces trois boules, on a

$$a \equiv a' + 1, \quad (\text{Mod. } 2),$$
$$b \equiv b' + 1, \quad (\text{Mod. } 2),$$
$$c \equiv c' + 1, \quad (\text{Mod. } 2).$$

cases du carré. Il est facile de voir qu'une case quelconque possède toujours une case congruente, et une seule, sur un carré de neuf cases arbitrairement choisi.

En opérant successivement pour toutes les boules du solitaire, on les placera sur le carré de neuf cases; cette nouvelle position est ce que nous appellerons un *résidu congruent* sur un carré de neuf cases, choisi arbitrairement.

On peut déduire de ce théorème la théorie des impossibilités par l'emploi de la règle complète, ainsi que l'a fait le docteur Reiss; mais il est préférable de se servir des théorèmes suivants, imaginés par M. Hermary, qui d'ailleurs les avait obtenus directement sans connaître les travaux de ses prédécesseurs.



POSITION RÉDUITE.

THÉORÈME V. — *Quelle que soit la position des boules du solitaire indéfini, on peut toujours les remplacer, par l'emploi de la règle complète, par une position congruente renfermée dans un carré formé de quatre cases et choisi arbitrairement.*

En effet, choisissons d'abord un carré de quatre cases, indiqué par les cases couvertes de la *fig.* 32, sans nous occuper, pour l'instant, des lettres qui la recouvrent, et bordons ce carré de cinq cases vides; nous formons ainsi un carré de neuf cases sur lesquelles nous pouvons établir le résidu congruent, par l'application du théorème précédent.

Désignons par a_0, b_0, c_0 ; a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2, les nombres de



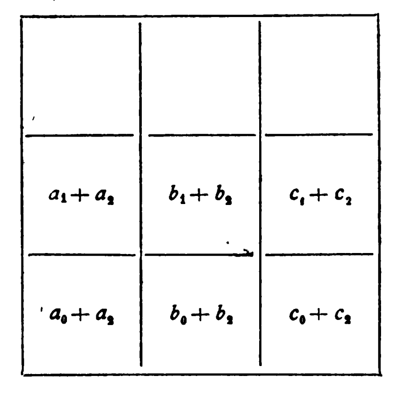
boules qui se trouvent placées sur chacune des neuf cases; nous formons ainsi la *fig.* 32 :

Fig. 32.

a_2	b_2	c_2
a_1	b_1	c_1
a_0	b_0	c_0

Par trois coups additifs, de haut en bas, on obtient (*fig.* 33) :

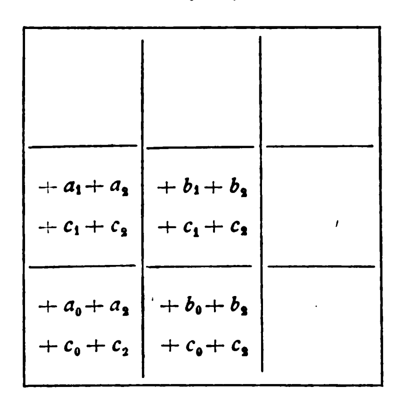
Fig. 33.



$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	$c_1 + c_2$
$a_0 + a_2$	$b_0 + b_2$	$c_0 + c_2$

Par deux coups additifs, de droite à gauche, on obtient (*fig.* 34) :

Fig. 34.



Par conséquent, nous avons remplacé la position quelconque du solitaire indéfini par une position congruente sur un carré formé de quatre cases et choisi arbitrairement.

Mais, par l'application de la règle complète (Théorème II), on peut supprimer ou ajouter un nombre pair de boules sur une case quelconque. Par conséquent, sur ce carré de quatre cases, on pourra continuer l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule boule sur chaque case, ou qu'il n'en reste plus. On obtient alors ce que l'on appelle le ***résidu*** ou la ***position réduite*** de la position considérée sur le solitaire par rapport au carré donné. Cela posé, on a encore la proposition suivante :

Théorème VI. — *Toutes les positions congruentes du solitaire indéfini ont la même position réduite par rapport à un même carré de quatre cases.*

En effet, supposons qu'avant d'avoir effectué la position con-

gruente sur le carré de neuf cases, on ait joué un coup, par l'application de la règle complète; ce coup aurait modifié d'une unité, en plus ou en moins, trois nombres, tels que a_1, a_2, a_3 de même lettre, ou les trois nombres a_1, b_1, c_1, de même indice; les nombres du carré de quatre cases (*fig.* 34) auraient été modifiés de 0 ou de 2 unités, et leur parité n'aurait pas changé.

Un nombre quelconque de coups n'altère donc pas la parité du nombre des boules du carré de quatre cases, et, par suite, n'altère pas la position réduite. C. Q. F. D.



LES SEIZE FORMES DE POSITIONS RÉDUITES.

En général, on appelle *arrangements complets* de p objets pris q à q, les différentes dispositions rectilignes contenant q objets pris une ou plusieurs fois parmi les p objets donnés. Ainsi les arrangements complets des deux chiffres 0 et 1 pris quatre par quatre sont les seize dispositions suivantes :

0000	0100	1000	1100
0001	0101	1001	1101
0010	0110	1010	1110
0011	0111	1011	1111

De même, les arrangements complets des dix chiffres décimaux pris 6 à 6 est l'ensemble de tous les nombres qui n'ont pas plus de six chiffres; leur nombre est 1 000 000 ou 10^6. Dans le cas général, le nombre des arrangements complets de p objets pris q à q est q^p.

Cela posé, sur un carré formé de quatre cases et choisi arbitrairement, la position réduite peut affecter *seize formes* différentes qui sont les arrangements complets de 0 et de 1 sur les

quatre cases du carré. Nous les rangerons d'après le tableau suivant :

Tableau des seize formes de positions réduites.

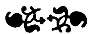
Ire CLASSE :	$\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}$.
IIe CLASSE :	$\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}$.
IIIe CLASSE :	$\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}$.

La *première classe* ne contient qu'une forme, qui est congruente à deux boules dans une même case, ou à trois boules dans trois cases consécutives, ou encore à deux boules séparées par deux cases consécutives.

La *deuxième classe* comprend neuf formes réductibles à une seule boule dans le carré de neuf cases.

La *troisième classe* comprend les six autres formes, qui ne sont jamais réductibles à moins de deux boules, quelles que soient les transformations qu'on leur fasse subir sur le carré de neuf cases. Ces formes comprennent toujours deux boules, au moins, qui ne sont jamais situées ni dans la même ligne, ni dans la même colonne.

On voit ainsi que, pour déterminer la *classe* (0, 1 ou 2 boules dans le résidu), il n'est pas nécessaire de réduire sur le carré de quatre cases; mais on peut opérer sur celui de neuf. La position réduite sur quatre cases est, comme nous l'avons dit, fort utile pour la théorie et très ingénieuse; c'est précisément en cela que consiste, pour la plus grande part, l'avantage de la méthode de M. Hermary sur celle du docteur Reiss.



APPLICATIONS DE LA THÉORIE.

Il est évident que l'on peut concevoir des solitaires limités dont la forme est quelconque, ainsi que le nombre des cases; on peut même supposer des solitaires irréguliers, que l'on peut déduire des solitaires de forme régulière en supprimant des cases dans l'intérieur ou sur les bords. Mais, quelle que soit la forme du solitaire, il est évident que tout problème impossible sur le solitaire indéfini l'est, *à fortiori*, sur le solitaire limité.

On a le théorème suivant, inverse du précédent :

THÉORÈME VII. — *Pour pouvoir passer, par la règle complète, d'une position donnée du solitaire indéfini à une autre aussi donnée, il faut et il suffit que les deux positions aient la même position réduite sur le même carré de quatre cases.*

En effet, on peut passer de la première position à la position réduite; puis, on peut passer de celle-ci à la seconde position en renversant le *sens* des coups qui permettent de passer de la seconde position à la même position réduite, et en renversant encore l'ordre des coups. Renverser le sens d'un coup, c'est remplacer le coup additif par le coup soustractif; par conséquent, le

coup soustractif ou additif $\frac{A}{C}$ doit être remplacé par le coup additif ou soustractif $\frac{C}{A}$.

Par conséquent, dans le cas du solitaire restreint, si l'on se propose de passer d'une position à une autre, il faut d'abord que ces deux positions aient la même position réduite sur le carré de quatre cases; mais on doit observer que cette condition n'est pas suffisante. En supposant cette condition admise, le problème pourrait encore être impossible; cette théorie laisse donc une grande part à la sagacité du joueur; mais elle lui épargne cependant des recherches nécessairement infructueuses, en lui permettant de reconnaître les problèmes qui ne comportent pas de solution théorique.

Dans le théorème précédent, nous avons considéré le problème général du solitaire, qui consiste à passer d'une position donnée à une autre également donnée; dans les théorèmes suivants, nous ne considérons que le cas de la *réussite*, qui consiste, comme nous l'avons dit, à réduire une position donnée à une seule boule. En se reportant à une position congruente sur un carré de neuf cases déduite de l'une des seize classes de positions réduites, on obtient les trois théorèmes suivants :

Théorème VIII. — *Lorsqu'une position initiale donnée permet d'obtenir une réussite de plusieurs manières différentes, les cases terminales sont nécessairement congruentes.*

Théorème IX. — *Lorsqu'une position initiale donnée ne peut être réduite à une seule boule sur une case terminale, elle ne peut être réduite à une seule boule sur une case terminale congruente.*

Théorème X. — *Si l'on ne peut obtenir une réussite en partant d'une certaine case initiale, on ne pourra obtenir de réussite en partant d'une case initiale congruente.*

Ces trois théorèmes ne sont que des cas particuliers du théorème VII.



IMPOSSIBILITÉS DU SOLITAIRE DE 37 CASES.

Examinons d'abord la position réduite du solitaire complet. On fait les quatre coups triples théoriques :

$$\frac{13}{\overline{15}},\ \frac{31}{\overline{51}},\ \frac{37}{\overline{57}},\ \frac{73}{\overline{75}}.$$

On ramène ainsi à la position congruente formée par un carré de vingt-cinq boules (Ex. III, page 116); par le procédé indiqué en cet endroit, on ramène à une boule unique en 44. Ainsi, le *solitaire complet de 37 cases donne une position réduite de deuxième classe.*

Le cas considéré est purement théorique, puisque l'on ne pourrait pas jouer le premier coup avec la règle restreinte; mais le résultat que nous venons d'obtenir va nous permettre de déterminer la position réduite lorsqu'on aura choisi une case initiale quelconque. En effet, on observera qu'au point de vue théorique, il est indifférent de retrancher ou d'ajouter une boule sur une case, puisque la règle complète permet d'en ajouter deux sur une même case (Théorème II); donc la position réduite du solitaire complet, moins une case, revient à une boule sur la case centrale, et à une autre sur la case congruente de la case initiale, la

plus voisine de la case centrale. Si la case congruente de la case initiale, la plus voisine de la case centrale, est l'une des cases **44**, **33**, **35**, **53**, **55**, la réussite est donc impossible. Nous avons démontré qu'elle était possible dans les autres cas, par l'emploi de la règle restreinte.

En résumé, sur le solitaire de 37 cases, la réussite est possible lorsque l'on prend pour case initiale l'une des seize cases dont l'ensemble forme la *finale du Tricolet* (Ex. IV, page 116) :

13, 15, 24, 31, 34, 37, 42, 43,
45, 46, 51, 54, 57, 64, 73, 75;

elle est impossible dans tous les autres cas.



ÉTUDE DU SOLITAIRE DE 41 CASES.

Le solitaire complet de 41 cases diffère du précédent par l'addition des cases **04**, **40**, **48**, **84**. Transportons ces boules sur les cases congruentes **34**, **43**, **45**, **54** ; enlevons, par un coup triple, les boules **34**, **44**, **54**; ajoutons deux boules en **44** (Théorème II), et enlevons, par un coup triple, les boules **43**, **44**, **45**; il reste une boule en **44**; donc le *solitaire complet de 41 cases donne une position réduite de deuxième classe*, comme le solitaire de 37 cases. Il comporte donc les mêmes solutions théoriques que ce dernier, et, en outre, celles qui correspondent aux cas où l'on prend pour initiales les *cases additionnelles* formant les sommets du carré.

Quant aux solutions pratiques, on ne connaît actuellement que celle que nous avons indiquée (page 117). Cette réussite a pour

case initiale **46** et pour case finale **42**; par le procédé de réciprocité, tout aussi bien que par symétrie horizontale, on en déduit la réussite de case initiale **42** et de case finale **46**. Pour les autres cas théoriquement possibles, M. Hermary pense que la solution pratique n'existe pas, mais il n'est pas parvenu à le démontrer. Nous engageons le lecteur à étudier cette question, dont la solution donnerait peut-être l'indication de nouveaux criteriums d'impossibilité.



ÉTUDE DU SOLITAIRE DE 33 CASES.

Le solitaire de 33 cases est le plus habituellement usité en Allemagne; il ne diffère du solitaire de 37 cases que par la suppression des quatre cases **22**, **26**, **62**, **66** (*fig.* 35). Si l'on effectue les coups triples théoriques

$$\frac{13}{15},\ \frac{23}{25},\ \frac{63}{65},\ \frac{73}{75},\ \frac{31}{51},\ \frac{32}{52},\ \frac{33}{53},\ \frac{34}{54},\ \frac{35}{55},\ \frac{36}{56},\ \frac{37}{57},$$

il ne reste aucune boule; donc *le solitaire complet de 33 cases donne une position réduite de première classe.* Il en résulte que la solution théorique existe toujours. Nous allons montrer, d'après le docteur Reiss, que la solution pratique existe encore, même en posant cette condition de *prendre une case initiale quelconque, et, pour case finale, une case congruente quelconque de la case initiale.*

Nous devons d'abord prendre une case initiale quelconque; mais par suite des considérations de symétrie que nous avons exposées précédemment, nous devons nous reporter au tableau des

groupes de cases symétriques du solitaire de 37 cases, en supprimant le groupe III, dont les cases n'appartiennent pas au solitaire que nous considérons actuellement. Il nous suffit donc de prendre pour case initiale l'une des cases de chacun des sept autres groupes; nous prendrons les cases initiales

44, 74, 54, 57, 24, 55, 52.

Les deux premières sont congruentes; les trois suivantes le sont aussi; il en est de même des deux dernières.

Fig. 35.

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
		31	41	51		

Combinons maintenant chacune des cases initiales que nous venons de choisir, avec l'une quelconque des cases congruentes, prise pour case finale; nous formerons le tableau suivant, dans lequel la première colonne indique l'ordre des parties distinctes; la deuxième colonne CI représente la case initiale, et la troisième colonne CF indique la case finale de la réussite. Ce tableau con-



tient vingt-huit réussites ; mais, en tenant compte des observations contenues dans la quatrième colonne, il ne faudra plus conserver que les réussites pour lesquelles la quatrième colonne ne renferme aucune observation.

Tableau des vingt-huit réussites du solitaire de 33 cases.

Nos.	CI.	CF.	OBSERVATIONS.
1	**44**	**44**	. . . . ——— . . . .
2	»	**74**	. . . . ——— . . . .
3	»	**47**	Symétrique inclinée du n° 2. . . . . .
4	»	**14**	Symétrique verticale du n° 2. . . . . .
5	»	**41**	Symétrique horizontale du n° 3 . . . .
6	**74**	**44**	Réciproque du n° 2 . . . .
7	»	**74**	. . . . ——— . . . .
8	»	**47**	. . . . ——— . . . .
9	»	**14**	. . . . ——— . . . .
10	»	**41**	Symétrique horizontale du n° 8. . . .
11	**54**	**54**	. . . . ——— . . . .
12	»	**57**	. . . . ——— . . . .
13	»	**24**	. . . . ——— . . . .
14	»	**51**	Symétrique horizontale du n° 12 . . . .
15	**57**	**54**	Réciproque du n° 12. . . . .
16	»	**57**	. . . . ——— . . . .
17	»	**24**	. . . . ——— . . . .
18	»	**51**	. . . . ——— . . . .
19	**24**	**54**	Réciproque du n° 13. . . . .
20	»	**57**	Réciproque du n° 17. . . . .
21	»	**24**	. . . . ——— . . . .
22	»	**51**	Symétrique horizontale du n° 20 . . . .
23	**55**	**55**	. . . . ——— . . . .
24	»	**52**	. . . . ——— . . . .
25	»	**25**	Symétrique inclinée du n° 24. . . . . .
26	**52**	**55**	Réciproque du n° 24. . . . .
27	»	**52**	. . . . ——— . . . .
28	»	**25**	. . . . ——— . . . .

Il ne nous reste plus à considérer que *seize réussites principales* que nous désignerons par les chiffres romains.

Tableau des seize réussites principales du solitaire de 33 *cases.*

I	De	**44**	à	**44**	IX	De	**54**	à	**24**
II	»	**44**	»	**74**	X	»	**57**	»	**24**
III	»	**74**	»	**74**	XI	»	**57**	»	**51**
IV	»	**74**	»	**47**	XII	»	**24**	»	**24**
V	»	**74**	»	**14**	XIII	»	**55**	»	**55**
VI	»	**54**	»	**54**	XIV	»	**55**	»	**52**
VII	»	**54**	»	**57**	XV	»	**52**	»	**52**
VIII	»	**57**	»	**57**	XVI	»	**52**	»	**25**



LES RÉUSSITES DU DOCTEUR REISS.

Ire RÉUSSITE. — De **44** à **44**.

$\frac{64}{44}$, $\frac{56}{54}$, $\frac{44}{64}$, $\frac{52}{54}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{75}{73}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{35}{55}$, $\frac{65}{45}$, $\frac{15}{35}$,
$\frac{45}{25}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{57}{37}$, $\frac{34}{36}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{46}{44}$, $\frac{23}{43}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{51}{31}$, $\frac{52}{32}$,
$\frac{31}{33}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{32}{34}$, $\frac{34}{54}$, $\frac{64}{44}$.

Cela représente une autre solution de la *triple croix* (*Prob.* XII, page 98) sans empiéter sur le solitaire de 37 cases.

IIe RÉUSSITE. — De **44** à **74**.

Remplacer le dernier coup de la réussite précédente par $\frac{54}{74}$, d'après le procédé général d'échange des cases finales.

III[e] réussite. — De **74** à **74**.

Remplacer le premier coup de la réussite précédente par $\frac{54}{74}$, conformément au procédé général d'échange des cases initiales.

IV[e] réussite. — De **74** à **47**.

$$\frac{54}{74}, \frac{52}{54}, \frac{44}{64}, \frac{73}{53}, \frac{74}{54}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{31}{51}, \frac{32}{52}, \frac{43}{63}, \frac{51}{53}, \frac{63}{43},$$
$$\frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{15}{13}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \frac{32}{34}, \frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{57}{55}, \frac{37}{57}, \frac{36}{56},$$
$$\frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{24}{44}, \frac{44}{46}, \frac{25}{45}, \frac{45}{47}.$$

Cette réussite comporte trois coups triples, de part et d'autre des coups ayant les rangs 11, 20, 26.

V[e] réussite. — De **74** à **14**.

On joue les vingt-quatre premiers coups de la réussite précédente; puis on fait :

$$\frac{34}{36}, \frac{55}{35}, \frac{57}{55}, \frac{25}{45}, \frac{55}{35}, \frac{36}{34}, \frac{34}{14}.$$

VI[e] réussite. — De **54** à **54**.

$$\frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{73}{53}, \frac{43}{63}, \frac{51}{53}, \frac{63}{43}, \frac{33}{53}, \frac{41}{43}, \frac{53}{33},$$
$$\frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \frac{15}{13}, \frac{25}{23}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{32}{34}, \frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{57}{37},$$
$$\frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{56}{36}, \frac{44}{46}, \frac{36}{56}, \frac{56}{54}.$$

Cette réussite comporte six coups triples, de part et d'autre des coups ayant les rangs 2, 8, 11, 14, 20, 29.

VIIe RÉUSSITE. — De **54** à **57**.

Remplacer le dernier coup de la réussite précédente par $\frac{55}{57}$.

VIIIe RÉUSSITE. — De **57** à **57**.

Remplacer le premier coup de la réussite précédente par $\frac{55}{57}$.

IXe RÉUSSITE. — De **54** à **24**.

On joue les vingt-sept premiers coups de la VIIIe réussite, puis l'on fait

$$\frac{56}{54}, \quad \frac{54}{34}, \quad \frac{46}{44}, \quad \frac{44}{24}.$$

Xe RÉUSSITE. — De **57** à **24**.

Remplacer le premier coup de la réussite précédente par $\frac{55}{57}$.

XIe RÉUSSITE. — De **57** à **51**.

On joue d'abord les six premiers coups de la réussite précédente; les vingt-quatre coups qui suivent se déduisent, par symétrie horizontale, des coups correspondants de la VIe réussite; on termine par $\frac{53}{51}$.

XIIe RÉUSSITE. — De **24** à **24**.

$$\frac{44}{24}, \frac{36}{34}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{57}{37}, \frac{56}{36}, \frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{32}{34}, \frac{13}{33},$$
$$\frac{34}{32}, \frac{31}{33}, \frac{51}{31}, \frac{52}{32}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{54}{56}, \frac{75}{55}, \frac{73}{75}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55},$$
$$\frac{56}{54}, \frac{64}{44}, \frac{44}{42}, \frac{63}{43}, \frac{42}{44}, \frac{14}{34}, \frac{44}{24}.$$



Cette réussite comporte cinq coups triples, de part et d'autre des coups ayant pour rangs 3, 9, 12, 18, 28.

XIIIe réussite. — **De 55 à 55.**

$$\frac{53}{55}, \frac{73}{53}, \frac{75}{73}, \frac{65}{63}, \frac{52}{54}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{31}{51}, \frac{32}{52}, \frac{43}{63}, \frac{51}{53},$$
$$\frac{63}{43}, \frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{35}{55}, \frac{47}{45}, \frac{55}{35}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \frac{13}{15},$$
$$\frac{23}{25}, \frac{34}{36}, \frac{15}{35}, \frac{36}{34}, \frac{33}{53}, \frac{34}{54}, \frac{53}{55}.$$

Cette réussite comporte six coups triples, de part et d'autre des coups ayant pour rangs 6, 12, 15, 18, 21, 27.

XIVe réussite. — **De 55 à 52.**

Remplacer le dernier coup de la réussite précédente par $\frac{54}{52}$.

XVe réussite. — **De 52 à 52.**

Remplacer dans la réussite précédente le premier coup par $\frac{54}{52}$.

XVIe réussite. — **De 52 à 25.**

On joue les vingt-huit premiers coups de la réussite précédente, puis on fait

$$\frac{43}{23}, \frac{44}{24}, \frac{23}{25}.$$

Remarque. — Il y aurait lieu de traiter, de la même manière, le problème du solitaire de quarante et une cases; mais la question paraît beaucoup plus difficile. On pourrait encore considérer beaucoup d'autres solitaires. Avec M. Hermary, nous signalerons plus spécialement à l'attention de nos lecteurs, celui que l'on déduit du solitaire de quarante et une cases, en supprimant les

deux cases opposées **40** et **48**. Sa position réduite est de première classe; il donne lieu à des solutions plus intéressantes que celles du solitaire de quarante et une cases; ces solutions existent pour plusieurs cas, et peut-être pour tous. C'est une question à élucider.



DES SOLITAIRES DES DIVERS ORDRES.

La question des solitaires des divers ordres repose sur la règle suivante : Faire franchir à une boule *n* cases consécutives, et enlever une boule dans chacune des cases franchies. Telle sera la règle du coup dans le jeu du *solitaire du* $n^{\text{ième}}$ *ordre*.

On peut établir la théorie de ce jeu comme celle du solitaire ordinaire ou de premier ordre. En admettant les quatre extensions de la règle restreinte, on obtient comme conséquences les théorèmes suivants :

Théorème XI. — *On peut toujours faire franchir à une boule quelconque* $n + 1$ *cases consécutives, dans un sens quelconque, soit sur une ligne, soit sur une colonne.*

La démonstration est semblable à celle du théorème III.

Théorème XII. — *On peut toujours faire franchir à deux boules d'une même case n cases consécutives.*

En effet, soient A et B, deux cases séparées par *n* cases consécutives $a_1, a_2, \ldots, a_n$; on jouera un coup additif de A en B; puis un coup soustractif de A en B.

Théorème XIII. — *On peut transporter deux boules d'une case quelconque à une autre quelconque.*



En effet, il suffit de démontrer que l'on peut transporter deux boules d'une case A sur la case contiguë B; mais, par le théorème XI, on peut faire franchir $n+1$ cases consécutives à deux boules de la case A dans le sens AB; par le théorème XII, en opérant en sens inverse, on ramène les deux boules sur la case B.

THÉORÈME XIV. — *On peut ajouter ou enlever deux boules en même temps sur n cases quelconques.*

En effet, d'après le théorème précédent, on peut supposer que les n cases sont consécutives; on fera alors deux coups soustractifs sur les n cases, par aller et retour.

En appliquant ces divers théorèmes, on peut énoncer ainsi qu'il suit les théorèmes concernant la position réduite :

Étant donné un carré quelconque de $(n+1)^2$ *cases, on peut y former la position réduite d'une position quelconque du solitaire de l'ordre n. Cette réduite comprendra* 0 *ou* 1 *boule dans chaque case du carré, et en outre un certain nombre de boules qui peuvent être placées n'importe où, à la condition qu'elles marcheront toujours par groupes de deux; le nombre de ces groupes pourra être l'un des nombres* $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. *La réduite peut donc affecter* $n(n+1)^4$ *formes distinctes qui caractérisent autant de systèmes de positions congruentes, tels qu'on ne peut passer de l'un à l'autre, quel que soit le nombre de coups que l'on joue.*

On peut encore ajouter une nouvelle extension de la règle, qui consisterait à modifier simultanément d'une unité $n+2$ cases consécutives, la modification pouvant être positive ou négative, individuellement pour chaque case. Dans ce cas, les boules qui

marchent par groupes de deux peuvent être supprimées, et le nombre des systèmes distincts se réduit à $(n+1)^4$.

Quant au nombre des systèmes réductibles à une seule boule, il est toujours égal à $(n+2)^2$.

Ces théorèmes ont été donnés par M. Hermary, à propos des questions que je lui avais indiquées sur les solitaires des divers ordres.





SIXIÈME RÉCRÉATION.

LA NUMÉRATION BINAIRE.

A Monsieur J.-J. Sylvester, correspondant de l'Institut, professeur de l'Université J. Hopkins, à Baltimore.

« La réflexion jointe à l'usage donne des idées nettes; et alors on trouve des méthodes abrégées dont l'invention flatte l'amour-propre, dont la justesse satisfait l'esprit, et qui font faire avec plaisir un travail ingrat par lui-même. »

(J.-J. Rousseau. — *Les Confessions.*)

« La vérité semble quelquefois courir au-devant de celui qui la cherche; souvent il n'y a point d'intervalle entre le désir, l'espoir et la jouissance. »

(Montesquieu. — *Rapport sur l'usage des Glandes Rénales.*)





SIXIÈME RÉCRÉATION.

LA NUMÉRATION BINAIRE.

DE LA NUMÉRATION.

On regarde habituellement la numération comme l'opération fondamentale de l'arithmétique, comme le principe de toutes les opérations que l'on peut effectuer sur les nombres. C'est là une faute grave de logique, puisque les propriétés des nombres existent indépendamment de tout système de numération.

La numération est une langue de pure convention, qui permet de parler et d'écrire les nombres au moyen de plusieurs autres représentés par des mots pour le langage, et par des chiffres pour l'écriture. L'opération fondamentale de l'arithmétique est la loi de formation des nombres, c'est-à-dire l'addition. La numération décimale est une opération plus complexe, contenant à la fois l'addition et la multiplication; ainsi, par exemple, le nombre 45 représente dans le système décimal le résultat de la multiplication de quatre par dix, et l'addition postérieure de cinq unités. On sait



d'ailleurs que cette numération décimale est une création relativement tardive de l'arithmétique.

On conçoit bien qu'au lieu de compter les nombres par dizaines, par centaines ou groupes de dix dizaines, par mille ou groupes de dix centaines, on aurait pu remplacer le nombre *dix* par tout autre, et ainsi par *douze*. Déjà Aristote avait observé que le nombre *quatre* pourrait très bien remplacer le nombre dix; Weigel publia, à ce sujet, en 1687, le plan d'une *Arithmétique tétractique*.

Le choix presque unanime du nombre dix, comme base de la numération, provient probablement de la conformation de la main. De même, la plupart des unités, chez les anciens peuples, dérivent ordinairement des dimensions du corps humain : ainsi, par exemple, le pied, la coudée, etc. Au XVIIe siècle, Melchisédec Thévenot cherchait une mesure universelle, dans la régularité et l'égalité de la cire des ruchers ([1]). Les nouvelles mesures sont établies sur des bases plus stables, et proviennent de rapports géodésiques, physiques, etc., comme le *mètre*, le pendule.



SYSTÈME BINAIRE.

Tout système de numération est donc fondé sur l'emploi d'unités de divers ordres, dont chacune contient la précédente un même nombre de fois. Ce nombre d'unités de chaque ordre, qui est nécessaire pour former une unité de l'ordre suivant est appelé

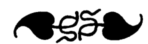
([1]) C. HENRY. — *Un érudit homme du monde, homme d'église, homme de cour*. Paris, 1879, p. 122.

la *base* du système de numération. Cette base doit être au moins égale à *deux;* en effet, si l'on prenait *un* pour base, les unités des divers ordres seraient égales entre elles, et il n'y aurait plus, à proprement parler, de système de numération. On doit à Leibniz la connaissance de l'*arithmétique binaire*. Dans ce système, la base est le nombre *deux*, et l'on peut écrire tous les nombres avec les chiffres 0 et 1, en adoptant cette seule convention, analogue à la convention de la numération écrite du système décimal, que tout chiffre placé immédiatement à la gauche représente des unités deux fois plus fortes. Ainsi, dans ce système, les nombres deux, quatre, huit, seize,..., s'écrivent

10, 100, 1000, 10000, ...,

et les nombres trois, cinq, onze, vingt-neuf s'écrivent

11, 101, 1011, 11101.



SYSTÈME DUODÉCIMAL.

Simon Stevin, de Bruges (mort en 1633), avait autrefois proposé le système de *numération duodécimale,* se rapprochant beaucoup plus de notre manière de compter les mois de l'année, les heures du jour, ou les degrés de la circonférence; mais le changement du système actuel produirait trop d'inconvénients relativement aux petits avantages qui résulteraient du choix de la base *douze*. Plus tard, Auguste Comte avait observé que la structure de la main, composée de quatre doigts à trois phalanges, ou de douze phalanges opposées au pouce, permettait de représenter,



avec les deux pouces posés sur deux phalanges, tous les nombres jusqu'à treize fois douze; par suite, on pourrait ainsi compter sur ses phalanges, dans le système duodécimal, plus facilement et plus loin que sur ses doigts, dans le système décimal. Mais de cet ingénieux système on ne connaît plus guère aujourd'hui que la comparaison faite par Auguste Comte, des quatre doigts et du pouce au peloton des quatre hommes et du caporal.

AVANTAGES DU SYSTÈME BINAIRE.

Dans ce système, les opérations ordinaires de l'arithmétique sont réduites à leur expression la plus simple ; les résultats de l'addition sont réduits à ceci : 1 et 1 font *deux*, je pose 0 et je retiens 1. Quant à la table de Pythagore, elle n'existe pas ici, on a seulement ceci : 1 multiplié par 1 donne 1; en sorte que la multiplication se fait par le déplacement transversal du multiplicande. Pour la division, il n'y a aucun tâtonnement. De plus, ce système se prêterait plus naturellement que tout autre à la confection des machines arithmétiques, si l'on ne possédait pas aujourd'hui l'admirable *Arithmomètre* de Thomas (de Colmar). Cependant je dois ajouter que la numération binaire m'a permis de trouver des nombres premiers beaucoup plus grands que ceux que l'on connaissait jusqu'à présent, et que j'en ai déduit le plan d'une machine qui donnerait de très grands nombres premiers [1]. Mais ce système est incommode à cause de la grande quantité de caractères

[1] *Voir* mon Mémoire intitulé : *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, et sur diverses questions d'arithmétique supérieure.* — Rome, 1877.

qui sont nécessaires pour figurer un nombre un peu considérable.

Voici un moyen très rapide indiqué par Legendre, dans la *Théorie des Nombres*, pour exprimer un grand nombre en caractères binaires. Soit, par exemple, le nombre 11 183 445 ; je le divise par 64, j'ai le reste 21 et le quotient 174 741 ; celui-ci divisé par 64 donne le reste 21 et le quotient 2730; enfin 2730 divisé par 64 donne le reste 42 et le quotient 42 ; mais 21 s'exprime dans le système binaire par **10101**, et 42 par **101010.** Donc le nombre proposé s'exprimera par

101010 101010 010101 010101.



LE JEKIM.

Le système de la numération binaire donne l'explication d'un symbole chinois portant le nom de *Je-Kim* ou *Jeking* (livre des mutations), attribué à Fohi, le plus ancien législateur de la Chine. Ce symbole est composé de 64 petites figures formées chacune de six lignes horizontales superposées, les unes entières, les autres brisées par le milieu. Il avait fait le désespoir des lettrés chinois et des savants européens, qui n'avait pu parvenir à l'expliquer d'une manière satisfaisante, lorsque l'illustre Leibniz, comparant les différents caractères du Je-Kim à la suite des nombres écrits dans le système binaire, reconnut que cette arithmétique pouvait servir à interpréter l'énigme, et que le Je-Kim n'était autre chose que la suite des 64 premiers nombres écrits dans le système de numération qui a pour base 2, mais intervertis de leur ordre naturel. En effet, si l'on représente l'unité par un trait horizontal simple ———, et le zéro par un trait brisé —— —— ; si,



de plus, on convient d'écrire les unités des divers ordres non plus de droite à gauche, mais bien de bas en haut; comme d'ailleurs les zéros placés à gauche d'un nombre n'en changent pas la valeur, on trouvera que les caractères chinois, composés de six lignes horizontales et représentés ci-dessous, peuvent être interprétés de la manière suivante;

CARACTÈRES CHINOIS du Jekim.	TRADUCTION dans le système binaire.	VALEUR sous forme ordinaire.
䷁	000000	0
䷗	000001	1
䷆	000010	2
䷒	000011	3
䷎	000100	4
䷣	000101	5

Leibniz voyait encore dans cette énigme qu'il avait si heureusement déchiffrée, une image de la création tirée du néant par la volonté de Dieu, de même que, disait-il, tous les nombres sont engendrés, dans le système binaire, par le zéro et l'unité. Cette idée lui plut tellement, qu'il engagea le P. Bouvet, missionnaire en Chine, à la développer devant l'empereur régnant, pour le con-

vertir au christianisme. Nous ne prétendons aucunement justifier cette application douteuse de la science aux mystères théologiques. Nous la citons comme un document curieux de l'histoire de l'arithmétique binaire, et nous ajouterons, avec un savant illustre, que l'idée de Leibniz était une idée pythagoricienne échappée à l'imagination active de ce grand génie, et sur laquelle il n'eût sans doute pas insisté plus qu'elle ne le méritait.



LES BOÎTES DE POIDS.

Nous donnerons d'abord le tableau des trente-deux premiers nombres écrits dans le système binaire :

1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111
8	1000	16	10000	24	11000	32	100000

Il est facile de continuer ce tableau aussi loin que l'on veut; on voit immédiatement qu'un nombre quelconque peut être formé par l'addition des nombres suivants :

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots,$$

qui représentent, avec l'unité, toutes les puissances de deux.

Mais dans cette addition, chaque nombre ne doit être pris qu'une seule fois. En d'autres termes, un nombre entier quelconque est une somme de puissances de deux, toutes différentes, en admettant l'unité comme puissance *d'exposant zéro*. Cette propriété pourrait être utilisée dans le commerce; ainsi, pour peser un nombre entier de grammes, on peut employer une boîte contenant chacun des poids suivants :

$$1^{gr},\ 2^{gr},\ 4^{gr},\ 8^{gr},\ 16^{gr},\ 32^{gr},\ \ldots.$$

Avec six poids, on pourrait ainsi peser jusqu'à 63^{gr}; avec n poids, on pourrait peser jusqu'à un nombre de grammes représenté par la formule

$$2^n - 1.$$

Mais les boîtes sont composées d'une manière bien différente, car elles contiennent les poids :

$$1^{gr},\ 2^{gr},\ 2^{gr},\ 5^{gr};$$
$$1^{dg},\ 2^{dg},\ 2^{dg},\ 5^{dg};$$
$$1^{hg},\ 2^{hg},\ 2^{hg},\ 5^{hg};$$
$$1^{kg},\ 2^{kg},\ 2^{kg},\ 5^{kg};$$

et ainsi de suite. On voit, en effet, qu'avec les nombres 1, 2, 2, 5, on peut former, par addition, tous les nombres de 1 à 10. Ces boîtes présentent l'avantage d'être plus en rapport avec le système ordinaire de la numération décimale, et, par conséquent, l'opération de la pesée n'exige aucun effort d'esprit; mais, jusqu'à une limite quelconque, il faut moins de poids dans le système binaire que dans le système décimal.

Les nombres de la progression triple

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots,$$

ont une propriété analogue, qui consiste en ce qu'en les ajoutant ou en les retranchant d'une certaine manière, on forme tous les nombres entiers possibles. Cette propriété remarquable se démontre très simplement au moyen du système de la numération ternaire ou de base 3, modifié par l'introduction de caractères négatifs. Ainsi, en convenant qu'un petit trait placé au-dessus d'un chiffre $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, ..., exprime que le nombre indiqué par ce chiffre avec sa valeur de position doit être retranché, on peut écrire tous les nombres du système décimal avec les cinq premiers chiffres significatifs 1, 2, 3, 4, 5, et le caractère 0. Par exemple, 6 serait exprimé par $1\bar{4}$; 7 par $1\bar{3}$, et ainsi de suite. Si l'on applique cette considération au système ternaire, on arrive à écrire tous les nombres avec les caractères 1, $\bar{1}$ et 0. Ainsi, les nombres

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,$$

peuvent être représentés par les symboles

$$1,\quad 1\bar{1},\quad 10,\quad 11,\quad 1\bar{1}\bar{1},\quad 1\bar{1}0,\quad 1\bar{1}1,\quad 10\bar{1},\quad 100.$$

On pourrait encore utiliser cette propriété pour la pesée, en répartissant convenablement les poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, ..., entre les deux plateaux d'une balance, pour évaluer, avec le moindre nombre possible de poids différents, les masses qui peuvent être exprimées en nombres entiers.

Ainsi, avec quatre poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, on pourra peser jusqu'à 40^{gr}; avec les cinq poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, 81^{gr}, on pourra peser jusqu'à 121^{gr}. En général, avec n poids

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots,\ 3^{n-1},$$

on pourra peser jusqu'à un nombre de grammes représenté par



l'expression $\frac{1}{2}(3^n - 1)$. La progression géométrique de raison 3 résout le problème énoncé par M. Labosne sous la forme suivante : *Trouver une série de poids avec lesquels on puisse faire toutes les pesées en nombres entiers, depuis 1 jusqu'à la somme des poids employés, cette somme étant la plus grande possible relativement au nombre de poids* (¹).



L'ÉVENTAIL MYSTÉRIEUX.

Reprenons le tableau que nous avons construit (page 151), et écrivons les uns au-dessous des autres, dans une première colonne à droite, tous les nombres tels que leur dernier chiffre dans le système binaire soit l'unité; écrivons dans une seconde colonne tous les nombres tels que leur deuxième chiffre, à partir de la droite, dans le système binaire, soit l'unité; dans une troisième colonne, tous les nombres tels que leur troisième chiffre, à partir de la droite, soit l'unité, et ainsi de suite. On peut s'arrêter à une colonne quelconque, à la cinquième, par exemple, les nombres écrits étant limités à 31, et, en général, pour la $n^{\text{ième}}$ colonne à $2^n - 1$. Cela fait, on présente le tableau ainsi formé à une personne quelconque; on lui dit de penser un nombre jusqu'à 31, et d'indiquer ensuite dans quelles colonnes ce nombre se trouve écrit. On devine facilement le nombre pensé en écrivant à la suite

(¹) *Voir* à ce sujet la 4ᵉ édition de Bachet, publiée par M. Labosne, p. 154-156.

et de droite à gauche, **1** pour toute colonne dans laquelle le nombre pensé se trouve écrit, et **0** pour toute colonne dans laquelle ce nombre n'est pas écrit. On a ainsi représenté le nombre pensé dans le système de la numération binaire.

Tableau de l'éventail mystérieux.

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

On simplifie le calcul, en écrivant au bas des colonnes les puissances correspondantes du nombre 2. Ces nombres sont habituellement écrits sur des cartons disposés en *éventail;* pour deviner un nombre qu'une personne a pensé, il suffira de lui présenter les cartons l'un après l'autre, en lui demandant si le carton contient le nombre pensé; puis de faire la somme des puissances de deux inscrites au bas de chacun des cartons où le nombre se trouve. D'ailleurs, on pourrait faire un jeu semblable avec les puissances de trois, mais ce serait un peu moins simple.



LA PROGRESSION DOUBLE.

Nous donnons, dans le tableau suivant, les trente-deux premiers nombres obtenus en doublant continuellement le nombre précédent, à partir de 2; ces nombres forment les puissances successives du nombre 2; dans le système binaire, on écrit ces nombres en faisant suivre l'unité de un, deux, trois,..., soixante-quatre zéros; en Algèbre, on fait suivre le chiffre 2 d'un autre en plus petit caractère, placé au-dessus, nommé exposant, qui indique combien de fois le nombre 2 a été pris comme facteur.

Ce tableau représente ce que Fermat appelait la *progression double.*

On observera que pour multiplier les puissances de 2, la neuvième et la onzième, par exemple, il suffit d'ajouter les exposants 9 et 11, ce qui fait 20; on a ainsi :

$$2^9 \times 2^{11} = 2^{20}, \text{ ou } 512 \times 2048 = 1\,048\,576.$$

En général, l'exposant du produit de deux puissances d'un même nombre est égal à la somme des exposants des deux puissances; de même, l'exposant du quotient de deux puissances est égal à la différence des exposants du dividende et du diviseur.

Tableau des puissances de 2.

n	2^n	n	2^n
1	2	17	131 072
2	4	18	262 144
3	8	19	524 288
4	16	20	1 048 576
5	32	21	2 097 152
6	64	22	4 194 304
7	128	23	8 388 608
8	256	24	16 777 216
9	512	25	33 554 432
10	1 024	26	67 108 864
11	2 048	27	134 217 728
12	4 096	28	268 435 456
13	8 192	29	536 870 912
14	16 384	30	1 073 741 824
15	32 768	31	2 147 483 648
16	65 536	32	4 294 967 296

C'est sur l'observation et sur la généralisation de ces propriétés des puissances que reposent, comme l'on sait, la théorie des logarithmes. Ainsi encore, si l'on veut calculer rapidement la soixante-quatrième puissance de 2, il faut multiplier par elle-même la trente-deuxième puissance, ce qui donne

$$2^{64} = 4\,294\,967\,296 \times 4\,294\,967\,296 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

On raconte que l'inventeur du jeu d'échecs avait demandé, comme récompense de sa découverte, un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant, jusqu'à la soixante-quatrième, qui aurait dû recevoir 2^{63} grains de blé. On a, d'après une formule bien connue dans la théorie des progressions géométriques, et que l'on peut vérifier sur le tableau,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Dans l'exemple précédent, le nombre total des grains de blé eût été de $2^{64} - 1$; c'est le nombre de vingt chiffres que nous avons écrit plus haut, et que l'on diminue d'une unité.



LES NOMBRES PARFAITS.

La progression double conduit à la connaissance des *nombres parfaits;* on appelle ainsi tout nombre entier qui est égal à la somme de ses diviseurs, ou préférablement, comme on disait autrefois, à la somme de ses *parties aliquotes*, attendu que cette dénomination exclut le nombre lui-même du rang de ses diviseurs. De plus, on appelait *nombre déficient*, tout nombre plus grand que la somme de ses parties aliquotes; et *nombre abondant*, un nombre plus petit que la somme de celles-ci.

La théorie des nombres parfaits impairs n'est pas complètement connue; quant aux nombres parfaits pairs, ils sont, sans exception, donnés par la formule

$$N = 2^{\alpha-1}(2^{\alpha} - 1).$$

dans laquelle le second facteur doit être un nombre premier; ainsi, dans cette formule, il ne faut pas donner à α toutes les valeurs entières, mais seulement toutes celles pour lesquelles le nombre $P_\alpha = 2^\alpha - 1$ est premier. Cette règle était connue d'Euclide; mais ce géomètre ne savait pas démontrer que l'on obtenait ainsi tous les nombres parfaits pairs.

On voit facilement que P_α ne peut être premier que si l'exposant α est lui-même un nombre premier; mais cela ne suffit pas. Il faudra s'assurer que $2^\alpha - 1$ est un nombre premier; c'est là une théorie très difficile, et, dans l'état actuel de la science, l'Arithmétique supérieure est impuissante à résoudre cette question lorsque l'exposant α est un nombre premier supérieur à 100. Les nombres parfaits connus actuellement sont les huit nombres du tableau suivant:

Tableau des nombres parfaits.

	α	$2^{\alpha-1}$	$2^\alpha - 1$	NOMBRES PARFAITS.
1	2	2	3	6
2	3	4	7	28
3	5	16	31	496
4	7	64	127	8 128
5	13	4 096	8 191	33 550 336
6	17	65 536	131 071	8 589 869 056
7	19	262 144	524 287	137 438 691 328
8	31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

Dans la seconde colonne, on ne trouve pas pour α les valeurs 11, 23 et 29; cela tient à ce que les trois nombres

$$2^{11} - 1,\ 2^{23} - 1,\ 2^{29} - 1$$

ne sont pas premiers, puisqu'ils sont respectivement divisibles par 23, 47 et 233.

On observera que les nombres parfaits sont toujours terminés par l'un des deux chiffres 6 ou 8; il en sera toujours ainsi, comme il est facile de le démontrer. Cela tient, d'une part, à la périodicité du dernier chiffre dans les puissances de deux, et, d'autre part, à ce que les nombres premiers α sont nécessairement, à l'exception des nombres 2 et 3, des multiples de 6 augmentés ou diminués de l'unité. Ainsi, lorsque α est un multiple de 6 diminué de l'unité, le nombre N est terminé par un 6, sans qu'il soit nécessaire que α soit premier; lorsque α est un multiple de 6 augmenté de l'unité, le nombre N est terminé par un 8. (*Voir* la Note IV, à la fin du volume.)



SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU BAGUENAUDIER.

A Monsieur le docteur O.-J. Broch, ancien ministre de Norwége, correspondant de l'Institut.

« Comment peut estre créance d'homme si legiere que telles baguenaudes soient prinses pour doctrine, ou telles superstitions pour vraye religion. »

(ALAIN CHARTIER.)

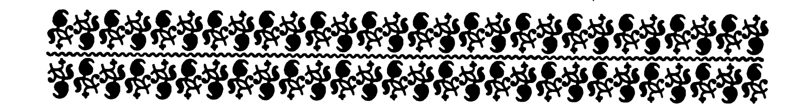
« Les hommes sont si nécessairement fous, que ce serait être fou par un autre tour de folie, de ne pas être fou. »

(PASCAL. — *Pensées.*)

« La science ne nous a pas encore appris si la folie est ou n'est pas le sublime de l'intelligence; si presque tout ce qui est la gloire, si tout ce qui est la profondeur, ne vient pas d'une maladie de la pensée. »

(EDGAR POË. — *Histoires extraordinaires.*)





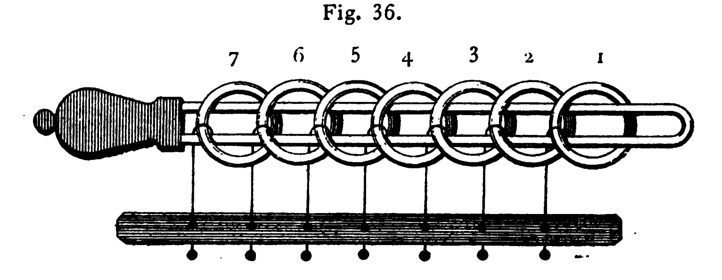
SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU BAGUENAUDIER.

Le baguenaudier est un instrument de jeu, formé d'anneaux enchevêtrés dans une navette, qu'il s'agit de séparer du système des anneaux. Nous conseillons l'emploi du baguenaudier de 7, 8 ou 9 anneaux; on le trouve facilement dans le commerce. Avec un plus grand nombre d'anneaux, le jeu devient absurde, car le nombre des opérations à faire pour

Fig. 36.



monter ou pour démonter le baguenaudier double continuellement par l'addition d'un anneau; on verra plus loin qu'il faudrait des

milliards de siècles pour démonter complètement un baguenaudier de 64 anneaux.



HISTORIQUE.

L'invention de ce jeu est fort ancienne; on le trouve mentionné pour la première fois, je crois, parmi l'un des 222 traités de Cardan, dans l'ouvrage intitulé : *De subtilitate libri XXI,* dont la première édition parut à Nuremberg en 1550; il existe plusieurs autres éditions de cet ouvrage, et notamment une traduction française publiée par Richard Leblanc (Paris, 1556, in-4), sous le titre : *Les livres d'Hieronymus Cardanus, de la Subtilité et subtiles Inventions, ensemble les causes occultes et les raisons d'icelles.* Le XVe Livre de cet ouvrage, que l'on doit considérer comme une sorte d'encyclopédie de la science et de l'industrie au XVIe siècle, est consacré aux *Subtilités inutiles et incertaines;* nous reproduisons ici la traduction du passage concernant la description du baguenaudier, d'après Richard Leblanc (p. 291) :

« L'instrument, composé de sept anneaus, est inutile et est tel : Une paillette de fer large d'un doigt, longue d'une paume, mince et déliée, en laquelle sont sept trous rons, estrois et d'espaces égales, disposés selon la longueur de la paillette ou lamine : ces trous reçoivent sept vergettes menues presque de la hauteur d'une once, mobiles en bas, circonflexes en haut, à fin qu'elles retiennent les anneaux enclos de la grandeur d'un doigt, et les vergettes sont contenues par l'anneau ensuivant sous le fléchissement et curvature. Pour cette cause, tous les anneaus, excepté le premier, sont engardés par le précédent, qui ne sautent librement

hors la verge antérieure : tout est de fer, et mesmement la navette ou navicule est de fer, de laquelle i'ai exactement rendu la figure que voiés présente. Elle est longue et large selon la grandeur de la paillette ou lamine supposée. Par cet instrument un ieu est inventé de subtilité admirable. »

Après l'indication de la manœuvre de l'appareil, on trouve la conclusion suivante : « Ceci de soi est inutile; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses de coffres ([1]). Telle subtilité est au ieu des échets; mais elle est plus délectable pour cause de la variété et contention; car, comme la navicule est d'invention très subtile en son genre, ainsi entre tous ieus les échets sont de grande subtilité. Autrefois, i'ai écrit et composé quatre livres des ieux. »



BIOGRAPHIE DE CARDAN.

La vie de Jérôme Cardan est l'une des plus étranges et des plus extraordinaires dont il soit fait mention dans l'histoire des sciences; c'est un tissu d'extravagances, d'actions incohérentes, viles et parfois criminelles, puisqu'il en vint à assassiner un homme qui l'avait volé au jeu. Scaliger a dit de lui qu'il était supérieur à tous les hommes, mais que souvent il descendait plus bas que les petits enfants; Leibniz, qui l'a déclaré fou et insensé, n'en admirait pas moins la supériorité de son esprit.

L'un des premiers, Cardan trouva la résolution de l'équation du

([1]) M. le docteur O.-J. Broch, président de la commission du royaume de Norwége à l'Exposition universelle de 1878, m'a dit que, dans son pays, les habitants des campagnes se servent encore du baguenaudier pour fermer leurs bahuts et leurs sacs.

troisième degré et démontra la formule qui porte encore son nom; il entrevit la résolution de l'équation du quatrième degré, que l'on doit à son disciple Ferrari; il imagina un appareil employé dans la marine pour la suspension des boussoles, et probablement aussi l'engrenage connu sous le nom de *joint universel.*

Né à Pavie, en 1501, il professa successivement la dialectique, la métaphysique, les mathématiques; il exerça la médecine à Milan, de 1529 à 1550; après avoir parcouru l'Écosse, l'Angleterre, les Pays-Bas et l'Allemagne, il revint à Milan, où il vécut encore quelques années, partageant son temps entre le travail, la débauche et le jeu. Son fils aîné, médecin comme lui, empoisonna sa femme, et fut décapité; son second fils tomba dans de grands désordres; il le fit incarcérer plusieurs fois, puis lui coupa l'oreille et finalement le chassa de sa maison. Enfin il termina son existence infortunée, à Rome, à l'âge de soixante-quinze ans; il était alors pensionné par le pape Grégoire XIII. Scaliger et de Thou prétendent qu'ayant fixé lui-même l'année et le jour de sa mort, il se laissa mourir de faim pour que sa prédiction fût justifiée. La *Nouvelle Biographie générale* (Firmin Didot) contient une longue et intéressante biographie de Cardan, par M. Victorien Sardou, de laquelle nous avons extrait quelques-uns des renseignements qui précèdent.





BIOGRAPHIE DE WALLIS.

Le second auteur qui a écrit sur le baguenaudier est un illustre mathématicien anglais, du nom de Wallis, auquel on doit une formule bien curieuse pour la détermination du rapport de la circonférence au diamètre [1]. Né en 1616, mort en 1703, Wallis possédait à fond toutes les connaissances de son temps. « Dès mon enfance, dit-il, j'ai toujours, dans toutes sortes de sciences, voulu savoir le fond des choses, non par routine, ce qui les fait oublier bientôt, mais par raison et par principes, afin de former mon jugement. » Il fut professeur de géométrie à l'Université d'Oxford, en 1649; il fut ensuite chapelain du roi, au rétablissement des Stuarts. Doué d'une mémoire prodigieuse, il lui arriva, une nuit, d'extraire de tête la racine carrée d'un nombre de *cinquante* chiffres, et de la dicter le lendemain.

Le tome II de son *Traité d'Algèbre* (p. 472) contient la description et la manœuvre du baguenaudier, avec un grand luxe de détails et de figures très bien faites.

[1] Au Congrès de l'Association française, à Montpellier, M. Éd. Collignon, inspecteur général des Ponts et Chaussées, a présenté des développements fort curieux sur la formule de Wallis, afin d'arriver à démontrer l'incommensurabilité de toutes les puissances du rapport de la circonférence au diamètre.

C'est un préjugé, partagé par beaucoup de personnes, de croire à l'impossibilité démontrée de la quadrature du cercle. On sait bien que les nombres π et π^2 sont incommensurables ; cependant si l'un des nombres π^4, π^8, π^{16},... était commensurable, on aurait résolu le problème de la quadrature du cercle. Cette observation n'a pas pour but d'engager quelques lecteurs dans cette recherche extrêmement difficile. Arago disait autrefois à l'Académie des Sciences qu'il avait constaté que les prétendues solutions de la quadrature du cercle étaient beaucoup plus nombreuses au printemps qu'à toute autre époque de l'année.

« Cardan, dit-il, en son livre *de la Subtilité*, parle de ce que nous allons faire connaître sur les anneaux enlacés; il classe cette subtilité parmi les inutiles, c'est-à-dire parmi celles qui ne touchent pas au gain, et qui se recommandent seulement comme pouvant mettre l'esprit en action; mais il en parle en termes si obscurs, que celui qui ne connaîtrait pas autrement la chose ne pourrait que difficilement deviner de quoi il s'agit. Nous nous sommes efforcé d'expliquer par des paroles l'objet en question; mais il serait plus facile de le faire connaître avec les doigts qu'avec la plume. La chose est d'une si grande subtilité et va si bien de pair avec l'Algèbre, qu'il est impossible de lui refuser ici un refuge. Toute la difficulté consiste à composer et à résoudre, à enlacer et à délacer.

« Il m'est impossible de dire quelle est l'ancienneté de cet objet; certainement on le connaissait avant Cardan, car cet auteur n'en parle pas comme d'une invention à lui propre. »



IMAGINATION D'UN CLERC DE NOTAIRE.

Ozanam, dans ses *Récréations mathématiques*, ne parle pas du baguenaudier; l'*Encyclopédie méthodique*, *dictionnaire des jeux*, en fait mention, mais c'est pour le placer après le jeu : *J'aime mon amant par B*, et pour décrire la suite des changements que l'on fait en démontant le baguenaudier quand tous les anneaux sont élevés, et en le ramenant à cet état.

Enfin, en 1872, un auteur ingénieux, qui avait gardé l'anonyme, a publié une brochure de seize pages in-8°, dont je dois la



communication à la bienveillance de M. le général Parmentier. Cet opuscule intitulé : ***Théorie du Baguenodier, par un clerc de notaire lyonnais*** ([1]), commence ainsi : « Lyon attire sur lui l'attention publique par son Exposition ; chacun des enfants de cette grande cité doit produire tout ce qui peut plaire aux visiteurs. Ce motif décide un modeste clerc de notaire à publier ses études sur le baguenodier ; le sujet est frivole, mais la théorie est neuve ; de plus, elle a été imaginée à Lyon. Cet opuscule aura atteint son but s'il montre que le baguenodier est un jouet instructif. »

L'auteur se livre d'abord à une discussion étymologique, de laquelle il paraît résulter que l'on doit écrire le nom de l'instrument avec un *o*, puisque ce nom vient probablement de nœud (***nodus***) de bagues. Après avoir indiqué les sources historiques que nous venons de mentionner, il expose une notation aussi simple qu'élégante des diverses configurations du baguenaudier, qui permet de fixer à chaque instant l'ordre du déplacement des anneaux ; aussi nous regrettions que l'auteur n'eût pas cru devoir livrer son nom au public, lorsque nous avons appris que l'estimable continuateur de Cardan et de Wallis est M. Louis Gros, conseiller à la cour d'appel de Lyon. La théorie qui va suivre n'est que le développement de l'idée fondamentale de l'auteur lyonnais et des observations qui nous ont été communiquées par M. Parmentier ; nous y avons ajouté quelques considérations qui feront comprendre que ce petit appareil, que bien des personnes regardent comme un joujou, renferme cependant, dans sa contexture variable à chaque instant, la représentation des diffé-

([1]) Lyon, imprimerie d'Aimé Vingtrinier, rue Belle-Cordière.

rentes propriétés du système de la numération binaire et de la théorie des combinaisons.



DISCUSSION ÉTYMOLOGIQUE DE M. GROS.

« Au lieu de décrire longuement un objet qui est dans le commerce, rassurons le lecteur, déjà choqué de l'orthographe que j'ai adoptée : *baguenodier,* et non *baguenAUdier.* Je ne suis pas un libre penseur, pas plus en orthographe qu'en religion et en politique; je me soumets à toutes les autorités légitimes, surtout à celle de l'Académie française.

« Cependant, j'ai un grain d'indépendance, et, quand je vois un mot orthographié d'une manière compliquée et contraire à l'étymologie, je propose une réforme.

« Quelle est la véritable étymologie du mot baguenodier? Consultons Ménage; il ne dit pas un mot du jouet dont nous nous occupons; mais il a des articles sur *bague*, *baguenaude*, *baguenauder*, *baguenaudier.*

« Il fait dériver *bague* de *bacca*, *que les Latins ont dit d'une perle, à cause de la ressemblance qu'ont les perles pour leur rondeur avec les bacques ou baies.*

« Les annotateurs de Ménage ne sont point satisfaits de cette explication; ils remarquent que *bague* ne vient point de *bacca;* ni une baie, ni une perle ne ressemblent à une bague.

« Ils font venir *bague* de la langue des Francs, de celle des Goths, de celle des Cimbres et de celle des Saxons; ils trouvent des mots analogues dans l'anglo-saxon, dans le vieux franc, dans l'allemand, dans l'irlandais, dans le suédois et dans l'anglais.

« Ces estimables annotateurs vivaient à une époque où le sanscrit n'était pas étudié; ne pourrait-on pas, à présent, trouver la racine primitive dans la langue sacrée des Indous, puisqu'elle est la mère de toutes les anciennes langues européennes?

« *Baguenaude*, fruit, et *baguenaudier*, arbuste, dérivent, suivant Caseneuve, de *bacca*, *qui est proprement le fruit rond de certains arbres*, *tels que sont le laurier*, *le lierre*, *le myrte et le houx; ce nom a été donné au baguenaudier à cause du petit fruit rond contenu dans sa cosse.*

« Ménage dit que de *bacca* on a fait *baccana*, *baccanalda, baccanaldarius.*

« Les annotateurs ne trouvent rien à redire à cela; je suis plus difficile qu'eux : la graine du *colutea*, pour parler le langage officiel moderne, ne ressemble point à celle du lierre et du houx; elle a la forme allongée d'un très petit haricot.

« Ce sont les mots extrêmement usuels qui se transforment beaucoup dans le langage; or, je ne crois pas que l'on ait jamais eu à parler souvent des grains renfermés dans les petites vessies du *colutea* et à leur donner trois noms successifs ou simultanés.

« Un glossaire de Rabelais fait dériver *baguenaude*, *futilité*, de *bague*, et *nade* (*nulle bague*).

« Ces conjectures n'ont point de fondements; j'ai d'autres idées, et les voici :

« Le baguenodier est un jeu très ancien; nous verrons bientôt que ce n'était pas une nouveauté il y a trois cents ans; on a dû lui donner un nom; celui qui s'est présenté tout naturellement est *nœud de bagues;* ce sont, en effet, des anneaux qui retiennent la navette par une certaine combinaison, comme deux brins de fil sont unis par une certaine manière de les contourner.

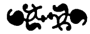
« Le mot **bague**, dans le sens d'*anneau*, était dans la langue depuis longtemps; en y joignant le mot *nodus*, ou son dérivé français nœud (avec *œ* en souvenir de l'*o* de *nodus*), on a fait *baguenodier*.

« Celui qui voit un homme sérieux passer de longs moments à élever et baisser les anneaux du baguenodier est invinciblement porté à dire : « En voilà un qui perd son temps; » de là s'occuper du nœud de bagues, *baguenoder* a pris la signification que nous connaissons bien.

« Faire éclater entre ses doigts le fruit du *colutea* est un plaisir champêtre auquel s'attache aussi forcément l'idée de perte de temps sans profit; on a donc employé dans cette circonstance le mot *baguenoder*, fait pour le nœud de bagues, et, par suite, l'arbuste a reçu le nom du jouet.

« Pourquoi a-t-on écrit *baguenauder* et non *baguenoder?* Il y a trois ou quatre cents ans, l'orthographe n'avait rien de fixe; chaque auteur avait la sienne, et même beaucoup d'auteurs ne s'occupaient point de ce détail : ils s'en rapportaient aux imprimeurs; Montaigne dit qu'il se contentait de recommander l'emploi de l'orthographe la plus ancienne dans l'impression de ses *Essais* (Livre III, Ch. IX). Tantôt on compliquait l'orthographe, comme lorsque d'*homo* on a fait *homme;* tantôt on la simplifiait, comme lorsque d'*auris* on a fait *oreille,* et d'*audere*, *oser*. Baguenoder a eu la mauvaise chance d'être compliqué d'un *au;* puis, pour justifier cet *au*, l'abbé Ménage a imaginé *baccana*, *baccanalda*, *baccanaldarius*.

« Ami lecteur, j'espère que, cela dit, vous me pardonnerez de ramener le mot *baguenodier* à l'orthographe étymologique. »



DESCRIPTION DU BAGUENAUDIER.

Cet instrument (*fig.* 36) se compose de deux parties principales : la *navette* et le *système des anneaux.*

La navette se compose essentiellement d'un fil métallique, ayant la forme d'un rectangle très allongé. Pour la commodité de la manœuvre, l'une des extrémités est munie d'une poignée, que l'on tient dans la main gauche pendant que l'on déplace les anneaux avec la main droite.

Le système des anneaux est formé :

1° D'un nombre quelconque d'anneaux égaux, dont le diamètre est à peu près le double de la largeur de la navette, et dont l'épaisseur est environ le quart de celle-ci; par conséquent, on peut faire passer la navette à travers l'anneau, tout aussi bien qu'un seul anneau, et même deux pris ensemble, à travers la navette ;

2° D'une petite planchette rectangulaire de dimensions pareilles à celles de la navette ; elle est percée, sur sa longueur, de trous équidistants, en nombre égal à celui des anneaux de l'instrument;

3° De petites tiges ou verges métalliques, en nombre égal à celui des anneaux; l'une des extrémités de chaque tige passe librement dans l'un des trous de la planchette, derrière laquelle cette tige est retenue par un crochet; l'autre extrémité entoure l'un des anneaux.

Le système est agencé de telle sorte que chacune des tiges qui retient l'anneau se trouve passée dans l'intérieur de l'anneau suivant. Ainsi la tige du *premier anneau* est passée dans le deuxième ;

celle du deuxième dans le troisième, et ainsi de suite ; mais la tige du *dernier anneau* ne passe dans aucun autre. Il y a donc une très grande différence dans la disposition du premier anneau et du dernier ; dorénavant, nous distinguerons les anneaux par les nombres 1,2,3,4,..., et nous supposerons la planchette disposée de telle sorte que le premier anneau soit placé à la droite.

On dit qu'un anneau est *monté* ou *levé* lorsque la tige qui lui correspond est passée dans l'intérieur de la navette, et que la navette est passée dans l'intérieur de l'anneau ; on dit que l'anneau est *baissé* ou *descendu*, dans le cas contraire ; le baguenaudier est *monté*, lorsque tous ses anneaux sont levés ; il est *démonté*, lorsque tous ses anneaux sont baissés ; alors la navette se trouve complètement séparée du système des anneaux.



DU DÉPLACEMENT D'UN ANNEAU.

Supposons que l'on tienne horizontalement, et de la main gauche, la navette du baguenaudier complètement monté, ainsi qu'on le vend dans le commerce ; il est facile de constater que le premier anneau peut être baissé ; pour cela, on le prend de la main droite, on tire la navette à gauche, et l'on passe l'anneau dans l'intérieur de la navette ; de cette façon le premier anneau se trouve baissé ; on le remonte par l'opération inverse. Lorsque le premier anneau est baissé, on ne peut déplacer le second, et on ne peut baisser que le troisième, ou le remonter par l'opération inverse ; mais si le premier et le troisième anneau sont baissés, on ne peut en baisser aucun autre.

Dans le cas général, il résulte de la construction même du

baguenaudier, que le déplacement d'un seul anneau est soumis aux principes suivants :

1° Dans une position quelconque des anneaux du baguenaudier, on peut toujours baisser le premier anneau s'il est levé, ou le lever s'il est baissé.

2° Pour qu'un anneau de rang quelconque puisse être déplacé, c'est-à-dire levé ou baissé, il faut et il suffit qu'il se trouve placé *immédiatement* à la gauche d'un anneau monté, et que celui-ci soit le seul anneau monté à la droite de l'anneau considéré.

Dans le cas où l'on ne déplace qû'un seul anneau à la fois, la marche du jeu est appelé *marche ordinaire.*



DU DÉPLACEMENT DE DEUX ANNEAUX.

Il y a exception, dans le déplacement des anneaux, pour la marche des deux premiers anneaux, qui peuvent être montés ou descendus, pris simultanément ; mais il n'existe aucun groupe de deux autres anneaux, ou de plus de deux anneaux, que l'on puisse faire marcher en même temps. Lorsque l'on emploie cette manœuvre simultanée des deux premiers anneaux, la marche du jeu est plus rapide; nous l'appellerons *marche accélérée.* On peut monter ou baisser simultanément les deux premiers anneaux dans une position quelconque des autres anneaux de l'appareil ; mais on verra facilement que si l'on doit les monter tous deux en même temps, on descend ensuite le premier. Dans ce qui suit, nous ne nous occuperons tout d'abord que de la marche ordinaire, qui est plus commode à considérer théoriquement ; nous donne-



rons ensuite un tableau qui permet d'en conclure immédiatement la théorie du jeu dans sa marche accélérée.

Pour représenter les diverses phases du jeu, nous figurerons la navette par une droite horizontale, les anneaux levés par des ronds placés au-dessus, dans leur situation respective, et les anneaux baissés, par des ronds placés au-dessous. Ainsi (*fig.* 37).

Fig. 37.

```
     7  6  5  4  3  2  1
A   ____________________
     o  o  o  o  o  o  o

B    o  o  o  o  o  o  o
    ____________________

C    o  o  o  o  o  o
    ____________________
                       o

D    o  o  o  o  o     o
    ____________________
                    o

E    o  o  o  o  o
    ____________________
                    o  o

F    o  o  o     o
    ____________________
              o     o  o
```

A désigne le baguenaudier de 7 anneaux, complètement démonté; B désigne le même appareil entièrement monté. Par un seul mouvement, on peut déduire C ou D de B, soit en baissant le premier anneau, soit en baissant le second; on peut aussi déduire E de B par un seul mouvement, en baissant simultanément les deux premiers anneaux; on peut aussi déduire E de D par le déplacement du premier anneau, toujours libre; mais on ne pourrait déduire immédiatement E de C. Ces observations s'appliquent encore, quelles que soient les positions des anneaux 4, 5, 6 et 7.

Dans la position C, on ne peut baisser que le troisième anneau;

de même, dans la position E, on ne peut baisser que le quatrième, pour produire la position F. Dans celle-ci, si l'on veut baisser le troisième anneau, il faut d'abord remonter les deux premiers, puis baisser le premier pour descendre le troisième.



PROBLÈME GÉNÉRAL DU BAGUENAUDIER.

Cela posé, le problème général que nous allons résoudre est le suivant : *On donne deux dispositions quelconques des anneaux, sur la navette d'un baguenaudier de grandeur arbitraire ; déterminer l'ordre et le nombre des déplacements à opérer, pour passer d'une disposition à l'autre, en supposant que le nombre des mouvements des anneaux soit le plus petit possible. En particulier, déterminer l'ordre et le nombre minimum des déplacements des anneaux, pour monter ou pour démonter entièrement le baguenaudier.*

Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse de la marche ordinaire en ne déplaçant qu'un seul anneau à la fois. Le problème général du baguenaudier se résout immédiatement au moyen de la notation ingénieuse de chacune des dispositions du baguenaudier, qui a été imaginée par l'auteur lyonnais. Tous les anneaux sont représentés, dans l'ordre de gauche à droite, par l'un des caractères **0** et **1**, avec les conventions suivantes. Le premier anneau levé, à partir de la gauche, est désigné par **1**, et les anneaux levés, situés à droite, sont alternativement représentés par **0** et **1**, sans tenir compte, dans cette alternance, des anneaux baissés ; quant aux anneaux baissés, ils sont indiqués, à leurs places respectives, par le signe du premier anneau levé à leur

gauche, et par 0, lorsqu'il ne s'en trouve aucun. En d'autres termes, en allant de gauche à droite, tout anneau levé implique une *variation* du signe de l'anneau, levé ou baissé, à gauche; tout anneau baissé implique une *permanence* du signe de l'anneau à gauche. On trouvera plus loin le tableau des coups successifs du baguenaudier avec la figuration ordinaire dans la colonne *Baguenaudes*, et la notation de M. Gros dans la colonne *Binaires*.



MARCHE ORDINAIRE.

La notation du baguenaudier, que nous venons d'exposer, représente un nombre écrit dans le système de numération binaire. Considérons une position quelconque du baguenaudier :

```
o   o o o
-------------      1 1 0 1 0 0 0;
  o       o o
```

dans cette position, on peut passer à deux autres : la première, en élevant le premier anneau, à la droite, ce qui donne

```
o   o o o   o
-------------      1 1 0 1 0 0 1;
  o       o
```

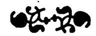
la seconde, en baissant le quatrième anneau, ce qui donne

```
o   o   o
-------------      1 1 0 0 1 1 1.
  o   o   o o
```

Dans le premier déplacement, on a augmenté la notation correspondante du système binaire d'une unité; dans le second, on a diminué cette notation d'une unité. Il en est de même pour

toute disposition des anneaux. Par conséquent, la marche ordinaire du baguenaudier correspond exactement à la formation successive de tous les nombres écrits dans la numération binaire; on monte le baguenaudier, en formant les nombres successivement à partir de zéro ; on démonte le baguenaudier, en suivant l'ordre décroissant des nombres entiers. D'ailleurs, on observera que pour monter le baguenaudier il suffit de déplacer, en commençant par la droite, le premier anneau représenté par **0**; pour le démonter, au contraire, il faut déplacer le premier anneau à droite représenté par le chiffre **1**.

Pour résoudre le problème général que nous avons posé, c'est-à-dire pour passer d'une disposition quelconque à une autre, on écrit les deux dispositions dans le système binaire, on prend la différence ; puis on transforme ce nombre dans le système décimal; on obtient ainsi le nombre minimum de déplacements pour passer de l'une à l'autre position. On effectuera ce changement en montant ou en démontant le baguenaudier, suivant que le premier nombre de la notation est plus petit ou plus grand que le second.



NOMBRE DES COUPS DE NAVETTE.

Il est facile, d'après cela, de déterminer le nombre des coups dans la marche complète du baguenaudier de 7 anneaux. Lorsque tous les anneaux sont montés, on a pour la notation

1 0 1 0 1 0 1,

ou, dans le système décimal,

$$2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 85.$$

Donc, il faut opérer 85 déplacements pour monter ou pour démonter le baguenaudier de sept anneaux, dans la marche ordinaire. De même, pour le baguenaudier de dix anneaux, il faut 682 coups de navette, puisque l'on a

$$2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2 = 682.$$

En général, si l'on désigne par P_n le nombre des déplacements nécessaires pour monter ou pour démonter le baguenaudier de n anneaux, on a, pour n pair égal à $2k$,

$$P_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \ldots + 2^3 + 2 = \frac{2^{2k+1} - 2}{3},$$

et pour n impair égal à $2k + 1$,

$$P_{2k+1} = 2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2 + 1 = \frac{2^{2k+2} - 1}{3}.$$

On peut réunir ces deux formules en une seule, en disant que P_n est toujours égal au plus grand nombre entier contenu dans le tiers de 2^{n+1}.

Nous donnons, dans le tableau qui termine cette récréation, la figuration des seize premiers coups ascendants du baguenaudier de 5, 6 ou 7 anneaux; la colonne n indique la succession des coups dans la marche ordinaire, le tableau contient aussi la figuration des quinze derniers coups du baguenaudier de 7 anneaux; on observera, en effet, que, bien que le baguenaudier soit monté par 85 changements, on peut encore *compliquer l'état de situation* des anneaux jusqu'au 127e coup, pour se préparer à monter le huitième anneau comme s'il existait. C'est à cette différence entre le baguenaudier monté et le baguenaudier plus compliqué, que l'on doit attribuer la divergence des calculs des trois auteurs qui ont écrit sur cet instrument. En général, pour arriver à l'état le

plus compliqué du baguenaudier de n anneaux dans la marche ordinaire, il faut un nombre de dérangements égal au nombre formé par n unités dans le système binaire, c'est-à-dire $2^n - 1$.

Ce nombre est précisément le total des combinaisons de n objets pris un à un, deux à deux, ..., n à n, de telle sorte que ce jeu donne la représentation de toutes les combinaisons, sans répétition, des n objets, ainsi que l'ordre dans lequel on doit numéroter les combinaisons.



SUR LES COMBINAISONS.

En général, on sait que l'on appelle combinaisons simples, ou sans répétition, de n lettres prises p à p, toutes les dispositions de p lettres qui ne diffèrent que par le choix des objets, et non par l'ordre dans lequel ils sont placés. On désigne habituellement ce nombre par $C_{n,p}$, et l'on a

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n} = 2^n.$$

Dans les cours d'algèbre, on démontre ce théorème par la formule du binôme de Newton, qui donne le développement de $(x+1)^n$, en supposant ensuite x égal à l'unité. Cependant ce théorème sur les combinaisons paraît avoir été connu bien avant la formule du binôme; voici la démonstration donnée par les anciens auteurs; elle repose sur l'idée fondamentale qui préside à l'accroissement des sciences mathématiques, c'est-à-dire sur l'observation et sur l'induction.

Prenons, par exemple, quatre lettres a, b, c, d; formons toutes

les combinaisons possibles de ces quatre lettres; ajoutons-y l'unité; nous avons le tableau suivant :

1,
a, *b*, *c*, *d*,
ab, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*,
abc, *abd*, *acd*, *bcd*,
abcd.

Le nombre total des combinaisons est 2^4; prenons maintenant une cinquième lettre *e*; formons un nouveau tableau en ajoutant cette lettre à toutes les combinaisons du tableau précédent, nous avons, en plus,

e,
ae, *be*, *ce*, *de*,
abe, *ace*, *ade*, *bce*, *bde*, *cde*,
abce, *abde*, *acde*, *bcde*,
abcde.

Le nombre des combinaisons possibles de cinq lettres est le double de celui de quatre lettres ou 2^5, et ainsi de suite. On retranche ensuite l'unité du tableau.



DURÉE DE LA MANŒUVRE.

Depuis la publication, dans la *Revue scientifique*, de notre article sur le baguenaudier, nous avons reçu de M. L. Gros une lettre intéressante, de laquelle nous extrairons le passage suivant : « Je regrette de n'avoir pas indiqué, dans ma théorie, le temps

qui est nécessaire pour monter ou démonter le baguenodier. Je l'ai fait dans une note très réduite que je n'ai pas publiée. Je vais vous donner ces indications dont vous pourrez tirer parti, si vous les trouvez bonnes.

« Le baguenodier est toujours livré avec un nombre impair d'anneaux. Cela est utile à ceux qui savent que, pour démonter le baguenodier dont tous les anneaux sont élevés, il faut commencer par abaisser le premier, puis le troisième anneau. Celui qui n'est pas averti abaisse les deux premiers anneaux, puis le quatrième; il s'éloigne de son but et il tend vers l'état extrême, où la navette ne contient que la verge du dernier anneau.

« Combien faut-il de temps pour monter ou démonter le baguenodier? On fait sans peine 64 changements par minute : en se hâtant beaucoup, on peut arriver à 80. Mais admettons 64 comme un nombre moyen :

5	anneaux tous élevés	exigent	21	changements, soit		20^s;
7	—	—	—	85	—	1^{m}20^s;
9	—	—	—	341	—	5^{m}20^s;
11	—	—	—	1365	—	21^{m}20^s;
13	—	—	—	5461	—	1^{h}25^{m}20^s.

« De même, 25 anneaux exigeraient plus de 349 500^m; par conséquent, pour démonter un baguenodier de 25 anneaux, il faudrait, à raison de 10 heures par jour, plus de 582 jours. »



MARCHE ACCÉLÉRÉE.

Nous avons encore donné, dans le tableau final, une colonne N qui indique le nombre des déplacements dans la marche

accélérée. Ce tableau fait voir que la marche accélérée est soumise aux règles suivantes :

1° Lorsque l'on monte le premier anneau, on doit monter en même temps le second;

2° Lorsque l'on a monté les deux premiers anneaux, on doit ensuite baisser le premier.

Le tableau montre, de plus, que huit coups consécutifs de la marche ordinaire, de 1 à 8, de 9 à 16, ..., correspondent à six dans la marche accélérée; par conséquent, si q désigne le quotient, et $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou 0 le reste de la division de n par 8, on a le tableau suivant de correspondance

$$\begin{array}{ll} n = 8q + 1,2, & N = 6q + 1, \\ n = 8q + 3,4,5, & N = 6q + 2,3,4, \\ n = 8q + 6,7, & N = 6q + 5, \\ n = 8q. & N = 6q. \end{array}$$

Il sera facile de déterminer, dans la marche accélérée, le nombre de coups nécessaires pour passer d'une position à une autre. En particulier, si l'on désigne par Q_n le nombre des déplacements dans le montage ou dans le démontage accéléré, on trouve, suivant que n est impair et égal à $2k + 1$, ou pair, et égal à $2k$,

$$Q_{2k+1} = 2^{2k} \quad \text{et} \quad Q_{2k} = 2^{2k-1} - 1,$$

résultat obtenu par M. Parmentier par une voie différente.

On trouvera encore que l'expression

$$3 . 2^{n-2} - 1$$

représente le nombre des coups qui correspondent à l'état le plus compliqué du baguenaudier de n anneaux dans la marche accélérée.

TABLEAU DES DEUX MARCHES DU BAGUENAUDIER.

Les seize premiers coups.

N.	n.	BAGUENAUDES.	BINAIRES.
1	1		0 0 0 0 0 0 1
	2		0 0 0 0 0 1 0
2	3		0 0 0 0 0 1 1
3	4		0 0 0 0 1 0 0
4	5		0 0 0 0 1 0 1
5	6		0 0 0 0 1 1 0
	7		0 0 0 0 1 1 1
6	8		0 0 0 1 0 0 0
7	9		0 0 0 1 0 0 1
	10		0 0 0 1 0 1 0
8	11		0 0 0 1 0 1 1
9	12		0 0 0 1 1 0 0
10	13		0 0 0 1 1 0 1
11	14		0 0 0 1 1 1 0
	15		0 0 0 1 1 1 1
12	16		0 0 1 0 0 0 0



TABLEAU DES DEUX MARCHES DU BAGUENAUDIER.

Les quinze derniers coups.

N.	n.	BAGUENAUDES.	BINAIRES.
85	113		1 1 1 0 0 0 1
	114		1 1 1 0 0 1 0
86	115		1 1 1 0 0 1 1
87	116		1 1 1 0 1 0 0
88	117		1 1 1 0 1 0 1
89	118		1 1 1 0 1 1 0
	119		1 1 1 0 1 1 1
90	120		1 1 1 1 0 0 0
91	121		1 1 1 1 0 0 1
	122		1 1 1 1 0 1 0
92	123		1 1 1 1 0 1 1
93	124		1 1 1 1 1 0 0
94	125		1 1 1 1 1 0 1
95	126		1 1 1 1 1 1 0
	127		1 1 1 1 1 1 1

HUITIÈME RÉCRÉATION.

—

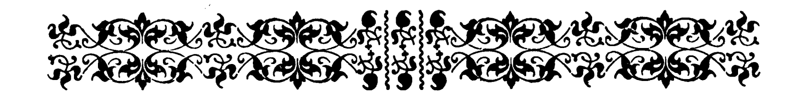
LE JEU DU TAQUIN.

A Monsieur Ange Laisant, député de la Loire-Inférieure, docteur ès sciences mathématiques.

« Ah! ah! vous voilà, monsieur le philosophe! Que faites-vous ici parmi ce tas de fainéants? Est-ce que vous perdez aussi votre temps à pousser le bois? »

(DIDEROT. — *Le Neveu de Rameau.*)





HUITIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU TAQUIN.

HISTORIQUE.

Le jeu connu actuellement sous le nom de *Jeu du Taquin* a été imaginé en Amérique, vers la fin de 1878, par un sourd-muet qui se proposa, par hasard, de ranger dans une boîte des numéros qui s'y trouvaient déplacés, sans les en faire sortir. C'est là l'origine qui m'a été indiquée, au congrès de Reims de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, par M. Sylvester, correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, professeur de l'Université J. Hopkins, à Baltimore.

Dès son apparition, il obtint une grande vogue à Baltimore, à Philadelphie et dans les principales villes des États-Unis de l'Amérique du Nord. Peu après, il fut importé en France, et offert en prime, par divers journaux politiques et illustrés, sous le nom de *double casse-tête gaulois.* Son succès en Europe a été encore plus grand qu'en Amérique. Ce n'est pas la première fois

qu'un pareil engouement s'est produit chez nous. Bachaumont raconte qu'en 1746 les polichinelles et les arlequins, à pieds et à bras mobiles, faisaient fureur. « On ne peut plus aller, dit-il, dans aucune maison, qu'on n'en trouve de pendus à toutes les cheminées. On en fait présent à toutes les femmes et filles, et la faveur en est au point que les boulevards en sont remplis pour les étrennes. »

La théorie mathématique de ce jeu a été publiée pour la première fois, dans le Journal de mathématiques de M. Sylvester [1]. Cette théorie a été donnée par M. Woolsey Johnson, d'Annapolis, et généralisée par M. W.-E. Story. Nous avons d'abord profité des *Notes on the 15" Puzzle* de ces deux auteurs; mais depuis, nous avons simplifié les démonstrations; nous indiquons ultérieurement des généralisations et des extensions considérables de ce jeu. Ce jeu fort intéressant est la représentation sensible d'une partie d'une importante théorie d'algèbre, imaginée par Leibniz, et connue actuellement sous le nom de théorie des déterminants. Aussi, avec les rédacteurs de l'*American journal*, doit-on considérer la théorie et la manœuvre de ce jeu comme une sorte d'introduction à l'étude de cette partie de l'algèbre moderne.

(1) *American Journal of mathematics pure and applied*, publied under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore, 1879.



DÉFINITION DU TAQUIN.

Sur le fond d'une boîte carrée, ou sur un échiquier de seize cases, on place dans un ordre quelconque seize cubes ou pions numérotés de 1 à 16; puis, on enlève du casier un cube quelconque, de telle sorte qu'il se trouve une case vide. Cela fait, il faut par le glissement des cubes, en profitant de la case vide, ramener les

Fig. 38.



Position fondamentale.

pions dans l'ordre régulier, puis replacer le cube enlevé sur la case vide, de manière à obtenir la position fondamentale représentée dans la *fig*. 38.



Supposons que l'on ait placé les cubes sur le fond de la boîte, et enlevé le numéro 16, conformément à la *fig.* 39, qui est l'une

Fig. 39.

7	4	6	11
8	5		2
9	3	14	12
15	13	1	10

Une position initiale.

des positions initiales. Dans celle-ci, on ne peut déplacer tout d'abord que l'un des cubes numérotés 5, 6, 2 ou 14, en faisant glisser l'un deux sur la case vide; puis on peut continuer de même. Il y a donc lieu de se demander combien il existe de positions initiales, puis de rechercher si l'on peut ramener à la position fondamentale toutes les positions initiales; enfin quelle doit être la marche à suivre pour résoudre le problème proposé.

Nous démontrerons qu'il existe plus de vingt trillions de positions initiales; on peut donc dire, avec raison, que le taquin est un *jeu à combinaisons toujours nouvelles*. Plus exactement, le nombre des positions initiales est

$$20\,922\,789\,888\,000;$$

on peut ramener la moitié d'entre elles à l'une quelconque des quatre positions directes, dans lesquelles le numéro 1 est placé

aux extrémités de la première diagonale du carré (*fig.* 40 à 43) :

Fig. 40. — Ordre L_1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 41. — Ordre C_1.

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Fig. 42. — Ordre C_3.

16	12	8	4
15	11	7	3
14	10	6	2
13	9	5	1

Fig. 43. — Ordre L_3.

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Les quatre positions directes.

On peut toujours ramener l'autre moitié à l'une quelconque des quatre positions inverses dans lesquelles le numéro 1 est placé

aux extrémités de la seconde diagonale du carré (*fig.* 44 à 47) :

Fig. 44. — Ordre L_2.

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
16	15	14	13

Fig. 45. — Ordre C_2.

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

Fig. 46. — Ordre C_4.

4	8	12	16
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

Fig. 47. — Ordre L_4.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Les quatre positions inverses.

En d'autres termes, nous démontrerons que l'on peut toujours ranger les cubes du taquin ordinaire de seize cases, suivant l'ordre naturel, en plaçant le premier à un coin quelconque du carré, ou au coin adjacent.

Mais, pour la résolution de ces divers problèmes, il est indispensable d'entrer dans quelques explications élémentaires sur



la théorie des *permutations rectilignes* et des *permutations circulaires.*



LES PERMUTATIONS RECTILIGNES.

Nous avons déjà indiqué, dans notre quatrième récréation, sur le problème des huit reines, la formule principale de cette théorie, en démontrant que le nombre des manières de ranger en ligne droite dix objets différents est égal au produit des dix premiers nombres. Plus généralement, en désignant par n le nombre des objets, et par N le nombre des arrangements en ligne droite, ou des *permutations rectilignes*, on a la formule

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n.$$

Ainsi, pour sept objets, il y a 5040 permutations. On trouve ce résultat dans un ancien ouvrage qui a pour titre : *Récréations mathématiques et physiques qui contiennent les problèmes et les questions les plus remarquables, et les plus propres à piquer la curiosité, tant des mathématiques que de la physique: le tout traité d'une manière à la portée des lecteurs qui ont seulement quelques connaissances légères de ces sciences*, par M. Ozanam, de l'Académie royale des sciences. Paris, 1778.

La première édition de cet ouvrage amusant date de 1692; la seconde édition renferme quelques erreurs. On y rencontre la question suivante : « Sept personnes devant dîner ensemble, il s'élève entre elles un combat de politesse sur les places (c'est, sans aucun doute, dans quelque ville de province éloignée de la capitale, ajoute naïvement le commentateur); enfin quelqu'un voulant terminer la contestation propose de se mettre à table comme l'on



se trouve, sauf à dîner le lendemain et les jours suivants, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les arrangements possibles. On demande combien de dîners devront être donnés pour cet effet. »

Le nombre des permutations est de 5040; à un dîner par jour, cela fait près de quatorze ans pour vider la querelle. Et dire que si l'on se fût trouvé treize à table, il eût fallu, pour cela, plusieurs millions d'années. Cela donne à penser et tend à prouver qu'il ne faut pas livrer un tel combat de politesse, sur les places, dans un dîner où il y a beaucoup de monde.



LES PERMUTATIONS CIRCULAIRES.

Nous devons faire une remarque sur la solution d'Ozanam; l'auteur considère toutes les places comme absolument distinctes; cependant lorsque les convives sont placés autour d'une table ronde, et que l'on ne tient pas compte du voisinage de la cheminée, de la porte ou d'une fenêtre, la position respective ne change pas, si, à un signal donné, les convives se lèvent tous et vont s'asseoir sur le siège de leur voisin de droite; doit-on alors considérer ces deux dispositions comme distinctes? Non, en vérité, si la table est ronde; et comme les convives peuvent encore se déplacer simultanément d'un rang vers la droite, et ainsi six fois successivement, on est amené à reconnaître que l'auteur a compté comme distinctes sept *permutations rectilignes* qui ne font qu'une seule et même *permutation circulaire*. En conséquence, le nombre des dîners des sept convives ou des permutations circulaires de sept objets n'est que le septième de 5040 ou 720.



En outre, on doit observer qu'au lieu de se placer de gauche à droite, les convives peuvent tous se placer de droite à gauche, de telle sorte que le voisin de droite est devenu celui de gauche, et inversement. Il faut donc encore diviser par 2 le nombre trouvé; cela ne fait plus que 360 dîners, et les convives en seront quittes à la fin de l'année.

Il nous reste à parler des dérangements produits par ces permutations; cela fait, nous reprendrons le casse-tête.



LES DÉRANGEMENTS.

Avec deux objets, les chiffres **1** et **2**, par exemple, on forme les deux permutations rectilignes

12 et **21**.

Dans la première, les objets sont rangés dans l'ordre naturel; dans la seconde, il y a inversion de cet ordre; on dit alors que la permutation contient *un dérangement*, parce que le chiffre **2** est placé avant le chiffre **1**.

Pour former les permutations des trois chiffres **1**, **2**, **3**, on place le chiffre **3** après l'une des deux permutations précédentes, et l'on a ainsi

123 et **213**;

on n'a introduit aucun dérangement nouveau, puisque le chiffre 3 vient après **1** et **2**, dans l'ordre naturel. Mais si nous faisons avancer ce chiffre d'un rang vers la gauche,

132 et **231**,

nous introduisons alors un dérangement dans la première permutation, et un nouveau dérangement dans la seconde; en faisant avancer encore le chiffre 3, comme ci-dessous,

312 et **321**,

la permutation **312** contient deux dérangements, et la suivante **321** en contient trois. Il y a lieu, dès maintenant, de donner la définition du dérangement; il y a ***dérangement*** ou ***inversion*** dans une suite de nombres différents écrits sur une ligne horizontale dans un ordre quelconque, toutes les fois qu'un nombre se trouve placé à la gauche d'un nombre plus petit.

Pour compter le nombre des inversions d'une permutation, on peut procéder de deux manières différentes : 1° en comptant pour chaque terme le nombre des termes qu'il *commande*, ou qui sont à sa droite, plus petits que lui, et faisant le total pour tous les termes; 2° en comptant pour chaque terme le nombre de ceux qu'il *subit*, ou qui sont à sa gauche plus grands que lui. Il est évident que, par les deux procédés, on obtiendra le même résultat final; cependant, suivant les cas, il est préférable d'employer l'un ou l'autre de ces deux procédés.



LES DEUX CLASSES DES PERMUTATIONS.

Cela posé, on divise les permutations de *n* nombres en deux classes; on range dans la *première classe,* avec celle qui ne contient aucun dérangement, en écrivant les nombres dans l'ordre naturel, toutes les permutations qui contiennent un nombre



pair de dérangements; on range dans la *seconde classe* toutes les permutations qui contiennent un nombre impair de dérangements. Pour indiquer qu'une permutation est de la première classe, nous la ferons précéder du signe +, et pour indiquer qu'une permutation est de la seconde classe, nous la ferons précéder du signe —. Ainsi la permutation + 12 donne

$$+ 123, \; - 132, \; + 312,$$

et la permutation — 21 donne

$$- 213, \; + 231, \; - 321.$$

On constate que les classes des permutations de deux ou de trois nombres sont également partagées; il en est toujours ainsi. En effet pour former les permutations de quatre éléments 1,2,3,4, on place d'abord le nombre 4 à la fin de chacune des permutations de trois éléments, ce qui ne change pas la classe de la permutation; en faisant rétrograder le chiffre 4 successivement vers la gauche, on change successivement le signe de la permutation; ainsi + 231 donne successivement, pour quatre éléments,

$$+ 2314, \; - 2341, \; + 2431, \; - 4231.$$

Le tableau suivant renferme toutes les permutations de quatre éléments, avec le signe de la classe à laquelle elles appartiennent; nous indiquons, dans les deux premières lignes, les deux permutations de deux éléments, et les six permutations de trois éléments, qui permettent d'établir la *généalogie* des permutations des quatre éléments.

Généalogie des permutations.

+ 12			− 21		
+ 123	− 132	+ 312	− 213	+ 231	− 321
+ 1234	− 1324	+ 3124	− 2134	+ 2314	− 3214
− 1243	+ 1342	− 3142	+ 2143	− 2341	+ 3241
+ 1423	− 1432	+ 3412	− 2413	+ 2431	− 3421
− 4123	+ 4132	− 4312	+ 4213	− 4231	+ 4321

On voit que le nombre des signes + est égal au nombre des signes — ; par suite, le nombre des permutations de chaque classe est le même. Il est facile de généraliser et de voir qu'il en est toujours ainsi. On a donc la proposition suivante, dans laquelle on considère zéro comme un nombre pair :

Théorème I. — *Les permutations de n objets se divisent en deux classes également nombreuses, suivant que le nombre des inversions est pair ou impair.*

On détermine facilement la classe d'une permutation en calculant le nombre de ses inversions, ainsi qu'il a été dit plus haut, et en supprimant continuellement les multiples de 2.



LES ÉCHANGES.

Il est facile de voir que si l'on échange dans une permutation les places de deux nombres consécutifs, on produit un changement de classe, puisque l'on a ainsi augmenté ou diminué le

nombre des inversions d'une unité. Plus généralement, si l'on déplace un élément de manière à lui faire franchir un nombre quelconque p d'autres éléments, le nombre des inversions est modifié d'une quantité qui est de même parité que p; en d'autres termes, si l'on déplace un élément en lui faisant franchir 2, 4, 6, 8, ... autres, la classe de la permutation n'est pas modifiée, et si l'on déplace un élément en lui faisant franchir 1, 3, 5, 7, ... autres éléments consécutifs, la classe de la permutation est changée. Cela posé, on a la proposition suivante, connue sous le nom de *théorème de Bézout.*

THÉORÈME II. — *L'échange de deux éléments quelconques d'une permutation change la classe de la permutation. Plus généralement, un nombre pair d'échanges d'éléments quelconques d'une permutation n'en modifie pas la classe; un nombre impair d'échanges produit sur la permutation primitive un changement de classe.*

En effet, il suffit évidemment de démontrer que l'échange de deux éléments quelconques produit un changement de classe. Supposons que l'on échange dans la permutation

$$\ldots, \mathrm{R}abc \ldots kl\mathrm{S} \ldots,$$

les éléments R et S séparés par p éléments; si l'on fait franchir à S les p éléments qui précèdent, on obtient

$$\ldots \mathrm{RS}abc \ldots kl \ldots;$$

puis, si l'on fait franchir à R les $(p+1)$ éléments qui suivent, on obtient

$$\ldots \mathrm{S}abc \ldots kl\mathrm{R} \ldots;$$

le nombre des inversions est donc modifié d'un nombre de même parité que $(2p+1)$ et, par suite, d'un nombre impair.

C. Q. F. D.

On peut encore démontrer le théorème suivant : *Le nombre total des inversions pour toutes les permutations de n lettres est la moitié du produit du nombre P_n des permutations de n lettres par le nombre $C_{n,2}$ des combinaisons des n lettres prises deux à deux.* On peut arriver à ce résultat de deux manières différentes : par la méthode analytique ou par la méthode synthétique.

Méthode analytique. — Désignons par D_n le nombre total des dérangements ou des inversions pour toutes les permutations de n lettres. Écrivons d'abord $(n+1)$ fois le tableau des permutations de n lettres ; nous avons ainsi $(n+1)D_n$ dérangements ; plaçons maintenant le $(n+1)^{\text{ième}}$ élément à la dernière place, à l'avant-dernière, ..., à la seconde, à la première place dans chacune des permutations précédentes, nous produisons successivement

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1),\ n$$

nouveaux dérangements, ou en tout $\frac{n(n+1)}{2}$; on a donc

$$D_{n+1} = (n+1)\,D_n + P_n\,\frac{n(n+1)}{2}.$$

Posons $D_n = P_n Q_n$, il vient la formule

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{n}{2}.$$

Par suite, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a successivement

$$Q_2 = Q_1 + \frac{1}{2},\ Q_3 = Q_2 + \frac{2}{2},\ \ldots,\ Q_n = Q_{n-1} + \frac{n-1}{2};$$

et en ajoutant toutes ces égalités

$$Q_n = \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

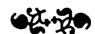
Méthode synthétique. — Le nombre total des inversions d'une permutation et de la permutation écrite dans l'ordre renversé est égal au nombre des combinaisons de n objets pris deux à deux, ou $C_{n,2} = \frac{1}{2}\,n(n-1)$;

par conséquent, en réunissant les deux permutations, on trouve au total

$$D_n = \frac{1}{2} P_n C_{n,2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — On trouverait de même la somme de tous les nombres formés par les permutations des deux, trois, quatre,..., neuf premiers chiffres. Ainsi la somme des nombres formés par les permutations des cinq chiffres 1, 2, 3, 4, 5 est

$$\frac{1}{2} P_5 \times 66666.$$



LES CYCLES.

On peut encore déterminer la classe d'une permutation par la méthode plus expéditive, dite des *cycles*, due à M. W. Johnson. Considérons une permutation quelconque,

8, 6, 12, 1, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7;

plaçons au-dessus de chacun de ses termes les nombres de la suite naturelle, ainsi qu'il suit :

Nombres :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15;
Pions :	8,	6,	12,	1,	5,	14,	2,	11,	13,	15,	4,	9,	3,	10,	7.

Au-dessous du nombre 1 se trouve le numéro 8; au-dessous de 8 le numéro 11; au-dessous de 11 le numéro 4, au-dessous de 4 nous retrouvons le numéro 1. On forme ainsi

Premier cycle : 1, 8, 11, 4;

en partant du nombre 2, on forme

Second cycle : 2, 6, 14, 10, 15, 7;

en partant du nombre 3, qui ne figure pas dans les cycles précédents, on forme

Troisième cycle : 3, 12, 9, 13;

enfin il reste le cycle formé par un seul nombre

Quatrième cycle : 5.

Il est facile de voir que l'échange de deux pions quelconques augmente ou diminue d'une unité le nombre des cycles de la permutation, suivant que les pions échangés appartiennent au même cycle ou à des cycles différents. Par suite, la variation du nombre des cycles est de même parité que le nombre des échanges entre les termes de la permutation. Donc :

THÉORÈME III. — *Deux permutations appartiennent à une même classe ou à deux classes distinctes, suivant que les nombres de leurs cycles sont ou ne sont pas de même parité.*

Pour déterminer la classe, on remarquera que la permutation suivant l'ordre naturel contient un nombre de cycles égal au nombre des éléments de la permutation (1).

(1) Le numéro du 25 septembre 1880 du journal *la Nature* contient un article intitulé : *Le dernier mot du taquin*, par M. Piarron de Mondésir. On y retrouve, sous une forme peu différente, le procédé des cycles. Si l'on range les cycles en deux ordres, suivant qu'ils contiennent un nombre pair ou impair de termes, on a le théorème suivant : Deux permutations appartiennent à la première classe ou à la seconde, suivant que le nombre des cycles d'ordre *pair* est pair ou impair. D'un autre côté, ce résultat m'a été indiqué par M. Delannoy, ancien élève de l'École Polytechnique.



LES ÉCARTS.

Considérons une permutation quelconque des n premiers nombres

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, \ldots, a_n;$$

appelons *écart* d'un terme la différence entre sa valeur numérique et le rang qu'il occupe; désignons-le par e, nous aurons

$$e_p = a_p - p.$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Si, dans une permutation des n premiers nombres, on supprime un terme quelconque, la variation du nombre des inversions est de même parité que l'écart du terme.*

Soient a_p le terme enlevé, c_p et s_p le nombre des inversions commandées et subies par lui; la variation du nombre des inversions est évidemment $c_p + s_p$. Mais le nombre des termes qui précèdent a_p est $(p-1)$, parmi lesquels s_p sont plus grands que lui, et $(p-1-s_p)$ sont plus petits que lui. D'autre part, le nombre des termes plus petits qui le suivent est c_p; en ajoutant les deux dernières expressions, on trouve le nombre total des nombres plus petits que a_p, c'est-à-dire $(a_p - 1)$; on a donc

$$a_p - 1 = p - 1 - s_p + c_p,$$

ou bien

$$a_p - p = c_p - s_p;$$

par suite, en ajoutant le nombre pair $2s_p$, on a

$$e_p \equiv c_p + s_p, \qquad (\text{Mod. } 2). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$



NOMBRE DES POSITIONS INITIALES.

Si l'on désigne la case vide par **0**, on peut représenter la situation du taquin, à un instant quelconque, en écrivant dans l'ordre de la position fondamentale de la *fig.* 38 les numéros des cubes mobiles; ainsi la *fig.* 39 donne la permutation des seize nombres

7, 4, 6, 11 | 8, 5, **0**, 2 | 9, 3, 14, 12 | 15, 13, 1, 10.

La position de la case vide étant arbitraire, le nombre des positions initiales du taquin est égal au nombre des permutations rectilignes de seize éléments ou au produit des seize premiers nombres, c'est-à-dire à

20 922 789 888 000

positions initiales. Dans le cas où on laisse toujours la même case à découvert, le nombre des positions initiales est seize fois plus petit.

LES IMPOSSIBILITÉS DE POSITION.

Dans chacune des positions initiale et finale, on suppose un cube portant le numéro *zéro* dans la case vide; on trace dans la position finale un chemin quelconque passant par toutes les cases,

et une seule fois par chacune d'elles, en admettant même que ce chemin procède par bonds quelconques; on trace le même chemin dans la position initiale; on considère les deux permutations formées par la succession des numéros des cubes dans ces deux chemins; de plus, on suppose que les cases du taquin sont alternativement noires et blanches, comme celles de l'échiquier. Cela fait, on a la proposition suivante :

Théorème V. — *Si les cases vides sont de même couleur, il est impossible de passer d'une position initiale à une position finale de classe différente; si les cases vides sont de couleurs différentes, il est impossible de passer d'une position initiale à une position finale de même classe.*

En effet, la règle du jeu revient à échanger le cube fictif zéro à chaque coup, avec un autre occupant une case de *couleur différente;* donc, dans le premier cas, on ne pourra passer d'une position à l'autre que par un nombre pair d'échanges, c'est-à-dire sans changer la classe de la permutation; dans le second cas, on ne pourra passer d'une position à l'autre que par un nombre impair d'échanges, c'est-à-dire en changeant la classe de la permutation. Ce théorème s'applique à un jeu plus général, dans lequel on échangerait le cube fictif *zéro* avec un cube placé sur une case de couleur différente.

On peut évidemment supprimer le nombre **0** dans les deux suites, s'il donne lieu dans l'une et l'autre à des écarts de même parité. Dans la pratique, on tracera le chemin de manière que, dans la position finale, il donne la suite naturelle des nombres; on joue ensuite quelques coups sur la position initiale, de manière à amener la case vide à la place correspondante de la position

finale; alors on peut se dispenser de tenir compte du *zéro* dans les permutations. En effet, il est facile de voir que si, dans deux permutations, des termes plus grands ou plus petits que les autres occupent les mêmes rangs, on peut les supprimer sans changer la parité de la différence des nombres de leurs inversions.

Par la considération de l'échiquier, on peut étendre la règle du jeu, en admettant que l'on puisse enlever un numéro d'une case de couleur opposée à la case vide, pour le placer ensuite sur celle-ci. La théorie reste la même.



LA PRATIQUE DU TAQUIN.

Reprenons la permutation des quinze nombres

8, 6, 12, 1, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7,

et admettons que l'on ait le droit de faire avancer un pion quelconque de deux rangs vers la gauche ou vers la droite; il est facile de voir que l'on peut ranger tous les numéros dans l'ordre, si la permutation est de première classe. En effet, faisons avancer le numéro 1 de deux rangs vers la gauche, il arrive au second rang; puis, en déplaçant 8 de deux rangs vers la droite, on obtient

1, 6, 8, 12, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

Le numéro 1 est à sa place; faisons avancer à son tour le numéro 2 de deux en deux rangs, il arrive au troisième, et en déplaçant 6 de deux rangs vers la droite, on obtient

1, 2, 8, 6, 12, 5, 14, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

En déplaçant le numéro 3 de deux en deux rangs vers la gauche, puis le numéro 4, on obtient

1, 2, 3, 4, 8, 6, 12, 5, 14, 11, 13, 15, 9, 10, 7.

Et ainsi de suite; de cette façon on peut toujours placer dans l'ordre les treize premiers pions; les deux derniers se trouveront dans l'ordre 14, 15, si la permutation est de première classe, et dans l'ordre 15, 14, si la permutation est de seconde classe. Ainsi, par cette manœuvre, on peut ranger une permutation quelconque dans l'ordre

1, 2, 3, ..., 13, 14, 15;

ou dans l'ordre

1, 2, 3, ..., 13, 15, 14

Cela posé, considérons le taquin de forme suivante (*fig.* 48) :

Fig. 48.

A	B	C	D	E	F	G	H
P	O	N	M	L	K	J	I

Le taquin élémentaire.

dans laquelle la ligne pleine est une barrière infranchissable; en profitant de la case vide, on peut sans changer l'ordre des termes dans le circuit AHIP, amener un numéro quelconque en B, puis la case vide en O; cela fait, si l'on glisse le cube de B en O, le terme B est avancé de deux rangs vers la gauche du circuit; par le mouvement inverse on l'avance de deux rangs

vers la droite ([1]). Par conséquent, il résulte des considérations exposées au commencement de ce paragraphe, que l'on peut toujours amener dans un ordre donné une permutation de même classe; et dans l'ordre donné, à l'*exception* des deux derniers numéros, une permutation de classe différente.

Il est d'ailleurs parfaitement évident que le même procédé de raisonnement s'applique au taquin ordinaire, en restreignant la règle du jeu par l'emploi de barrières figurées par des lignes pleines; les cases forment alors un circuit fermé (*fig.* 49).

Fig. 49.

A	B	C	D
P	O	N	E
K	L	M	F
J	I	H	G

Le taquin gêné.

En résumé, par la considération des cycles, on détermine d'abord la classe de la position initiale donnée; pour plus de commodité, on mettra immédiatement la case vide en G. Cela fait, on rangera facilement les cubes des deux premières lignes ou des deux premières colonnes dans l'une des quatre positions directes ou des quatre positions inverses suivant que la position donnée est de première ou de seconde classe; il reste ensuite à

([1]) Cette démonstration, très simple, m'a été indiquée par M. Laisant.

placer les sept autres cubes dans un taquin élémentaire de huit cases, par la manœuvre indiquée pour le taquin de la *fig.* 48.

On peut encore résoudre le problème du taquin de la manière suivante. On détermine d'abord, par la méthode expéditive des cycles, la classe de la position donnée; si cette position est de première classe, on la ramène, comme il a été dit, à la position fondamentale; si cette position est de seconde classe, on échange deux éléments quelconques; elle devient de première classe, et peut encore être ramenée, après cet échange, à la position fondamentale.

On peut remplacer cet échange par l'enlèvement d'un cube situé sur une case de même couleur que la case vide, en le plaçant sur cette case.



ORDRE MAGIQUE.

Il existe encore d'autres ordres réguliers pour disposer les cubes du taquin; ainsi on peut les ranger suivant un ordre tel, qu'après avoir replacé le cube enlevé, la somme des numéros soit la même dans toutes les lignes, dans toutes les colonnes et dans les deux diagonales; on obtient alors ce que l'on appelle l'*ordre magique.* Cette théorie appartient à une autre récréation, le *jeu des carrés magiques,* sur laquelle nous reviendrons ultérieurement. Cependant, nous donnerons ici la manière d'obtenir le carré magique pour le taquin de 16 cases.

Pour cela, reprenons la position fondamentale de la *fig.* 38; ne touchons pas aux huit nombres des deux diagonales; échangeons

les autres cubes placés symétriquement par rapport au centre du carré, c'est-à-dire

2 et 15, 3 et 14, 5 et 12, 8 et 9.

Par ces quatre substitutions, nous ne changeons pas la classe de la permutation, et nous obtenons le carré magique (*fig.* 50):

Fig. 50.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Ordre magique direct.

Fig. 51.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Ordre magique inverse.

dans lequel la somme des cubes de chaque ligne, de chaque colonne, ou de chaque diagonale est égale à 34. On peut donc ramener une position quelconque de première classe à cet ordre magique; si la position initiale est de seconde classe, on pourra toujours la ramener à l'ordre magique inverse obtenu en renversant l'ordre des cubes de toutes les lignes (*fig.* 51), ou de toutes les colonnes de l'ordre magique direct.



LE TAQUIN CONTINENTAL.

On peut généraliser d'une infinité de manières la forme du taquin. Nous appellerons *taquin continental* un assemblage quelconque de carrés juxtaposés suivant un côté commun; pour faire comprendre la variété de forme que cet assemblage peut présenter, nous dirons qu'il est assujetti seulement à former un *continent*, dans l'intérieur duquel on peut rencontrer des *mers intérieures* (*fig.* 53).

On place sur les carrés des cubes distingués par une lettre ou par un numéro spécial, et on enlève l'un deux de manière à former une case vide; cela fait, il s'agit de faire glisser les cubes sur la case vide contiguë, et de passer ainsi d'une position initiale donnée à une position finale également donnée.

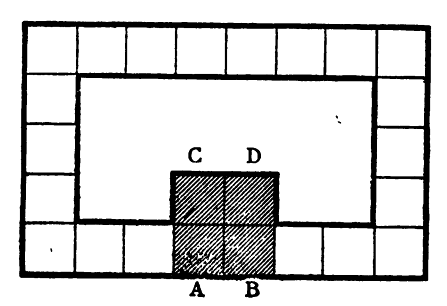
Il est évident qu'un tel jeu peut présenter deux sortes d'impossibilités : les premières proviennent de l'incompatibilité des positions initiale et finale, comme dans le taquin ordinaire; les autres proviennent de la forme du taquin.

THÉORIE DU GARAGE.

Considérons d'abord comme taquin continental le taquin formé par un carré de quatre cases ABCD, et un circuit de forme quelconque aboutissant par ses deux extrémités à deux cases contiguës A et B du carré. On peut fermer ce circuit, soit par AB,

soit par ACDB; de là deux circuits distincts qui se confondent sur la plus grande partie de leur parcours. On peut considérer ce taquin comme un taquin élémentaire, et, par suite, il est toujours possible d'échanger deux positions de même classe; nous dirons que les quatre cases A, B, C et D constituent un *garage*.

Fig. 52.



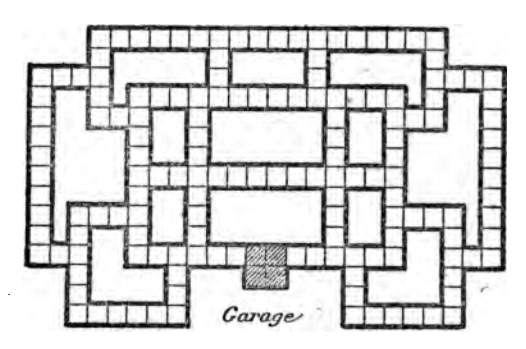
Taquin simple à garage.

Considérons maintenant un taquin plus complexe, formé d'un garage, d'un circuit quelconque et d'un réseau formé d'*embranchements* qui s'insèrent les uns sur les autres, ou sur la ligne principale, en des points différents, et de telle sorte qu'il n'y ait aucune *tête de ligne* (*fig.* 53).

Supposons que, dans la position initiale, la case vide soit dans la même portion de ligne que le garage, c'est-à dire de telle sorte qu'il n'y ait aucune bifurcation entre le garage et la case vide; si cette condition n'était pas remplie, on jouerait quelques coups afin de l'obtenir. Supposons qu'il en soit de même pour la position finale; si cette condition n'est pas remplie, on jouera quelques coups pour arriver à une *position intermédiaire;* on pourra toujours

remettre la case vide à sa place dans la position finale, en renversant l'ordre du mouvement qui a permis de passer de la position finale à la position intermédiaire.

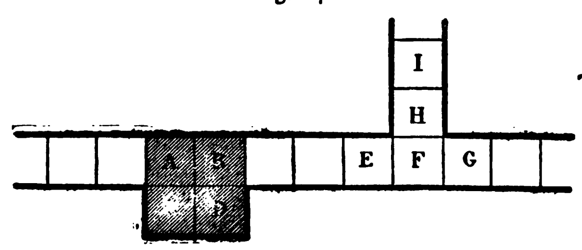
Fig. 53.



Taquin à embranchements et garage.

Cela posé, il est facile de voir que, dans un embranchement quelconque, on peut déplacer un cube quelconque de deux rangs; en effet, on forme un circuit fermé passant par le garage et le cube

Fig. 54.



considéré : on rentre ainsi dans le cas que nous venons d'indiquer; cela fait, on ramène tous les autres cubes, à l'exception des trois cubes considérés, au moyen du mouvement de circulation (*fig.* 54)

Cependant, s'il s'agissait de faire sauter G au-dessus de FH, la méthode ne s'appliquerait pas, parce que les cubes GFH ne peuvent se trouver dans un même circuit avec le garage; alors on fait passer G par-dessus F et E; de cette façon E se trouve à la bifurcation; puis on fait sauter G par-dessus E et H; on obtient encore le résultat désiré.

Par conséquent, dans un taquin à embranchements quelconques, sans tête de ligne, on peut toujours, par le moyen du garage, faire franchir à un cube quelconque deux cubes consécutifs, sans déranger l'ordre de tous les autres cubes. Par ce procédé, on peut remplir un embranchement quelconque dans l'ordre de la position intermédiaire; on immobilise les cubes de cet embranchement, de telle sorte que l'on a diminué d'une unité le nombre des embranchements du taquin.

En simplifiant successivement le réseau, on en déduit ce théorème :

THÉORÈME XIV. — *Dans un taquin formé d'un nombre quelconque d'embranchements et d'un garage sans aucune tête de ligne, on peut passer d'une position quelconque à une autre position de même classe.*



LES IMPOSSIBILITÉS DE FORME.

Pour déterminer les impossibilités de la forme du taquin continental dans l'application de la théorie du garage, on trace d'abord un circuit le long des côtes du continent, et d'autres circuits, s'il y a lieu, le long du rivage des mers intérieures; puis on fait choix

d'un garage sur la côte ou dans l'intérieur, et l'on trace des embranchements suivant les lignes ou suivant les colonnes du taquin; d'après cela, il est évident que le problème de ramener une position quelconque à une position de même classe ne peut rencontrer d'impossibilité que dans les deux cas suivants :

1° Si le taquin renferme des presqu'îles ou des péninsules que nous figurons plus loin;

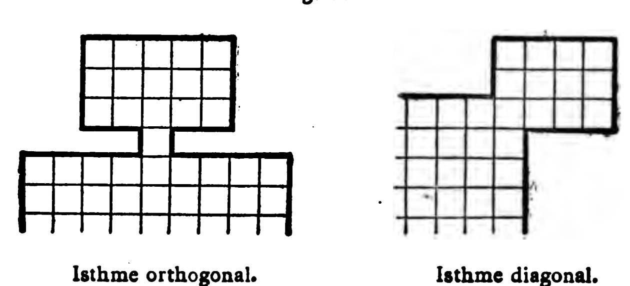
2° Si le continent est partout trop étroit pour permettre l'établissement d'un garage.



LE TAQUIN A PÉNINSULE.

Lorsque les côtes de l'Océan ou des mers intérieures présentent l'un des accidents indiqués dans la *fig.* 55, on dit que le taquin

Fig. 55.



Isthme orthogonal. **Isthme diagonal.**

Taquins à péninsule.

renferme une péninsule; alors le taquin se divise en deux autres séparés par une seule case, qui forme ce que l'on peut appeler *isthme orthogonal* ou *isthme diagonal.*

Alors, dans le cas général, il y a impossibilité de forme; en effet, il est facile de voir qu'il est impossible de faire entrer dans l'isthme aucun autre cube que celui qui lui est contigu, de telle sorte que l'on ne peut effectuer le passage d'un cube dans l'isthme. Cependant, pour ce taquin à péninsule, le problème du taquin peut être possible lorsque la solution n'exige pas le passage de l'isthme. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que, pour le continent et pour la péninsule considérés séparément, les positions initiale et finale appartiennent à la même classe, et, de plus, que l'on puisse établir un garage de part et d'autre.

Enfin, si la péninsule a plus d'un isthme, on rentre dans le cas général du continent avec mer intérieure sans péninsule.



LE TAQUIN COMPLET.

On peut considérer le jeu du taquin d'une autre manière; on suppose le taquin complètement couvert, et le joueur a la faculté d'enlever à son choix un cube quelconque, puis de jouer suivant la marche ordinaire et de replacer, à la fin de la partie, le cube enlevé sur la case vide. Il s'agit de choisir le cube à enlever de telle sorte que l'on puisse arriver à une position finale convenue.

Pour résoudre ce nouveau problème, on trace dans la position finale convenue un chemin, de manière à obtenir la suite naturelle des nombres; on trace le même chemin dans la position initiale, et l'on détermine le nombre des inversions de la permutation correspondante. Si la permutation est de première classe, il faut

enlever un cube d'écart pair, et, si la permutation est de seconde classe, il faut enlever un cube d'écart impair.

Il y a ainsi lieu de se demander si le problème est toujours possible; en d'autres termes, existe-t-il des positions initiales pour lesquelles tous les cubes aient des écarts de même parité? Nous allons faire voir qu'il peut y avoir toujours possibilité ou toujours impossibilité pour tout cube choisi dans la permutation initiale. En effet, la position finale, disposée suivant l'ordre naturel, ne contient que des écarts nuls; donc, si l'on exécute un nombre quelconque N d'échanges entre des cubes de même parité, tous les écarts resteront pairs, et il n'y aura aucun écart impair; par conséquent, si N est impair, la permutation considérée après les N échanges est de seconde classe; par suite, quel que soit le cube enlevé, la permutation reste de seconde classe et ne peut être ramenée à la position finale; il y a donc *impossibilité* pour un cube quelconque.

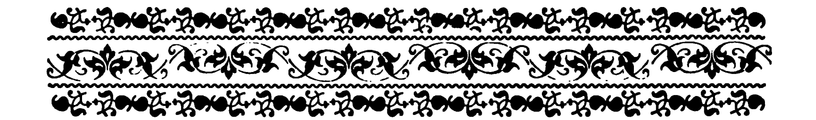
Dans le cas contraire, si N est pair, la permutation considérée après les N échanges est de première classe, comme la position finale; il y a donc *possibilité* pour un cube quelconque.

Lorsque le nombre total des cubes est pair, il existe une seconde série de positions initiales pour lesquelles il y a encore possibilité ou impossibilité complète. En effet, reprenons la permutation naturelle des n premiers nombres, échangeons chaque cube de numéro impair, avec le cube de numéro pair qui le suit; tous les écarts deviendront impairs; faisons ensuite un nombre quelconque d'échanges entre les cubes de même parité, nous obtiendrons alternativement des permutations de première et de seconde classe; les premières donnent l'impossibilité complète, et les dernières donnent la possibilité complète.

Lorsque le nombre total des cubes est impair, il existe toujours nécessairement un cube d'écart pair; alors les positions de la deuxième série comportent une seule exception, pour ce cube.

Remarque. — Les ingénieuses théories du *Taquin continental* et du *Taquin complet* sont dues, pour la plus grande partie, à M. Hermary.





NOTES.

NOTE I.

Sur le jeu des traversées.

Nous avons donné (p. 15), l'énoncé d'un problème général sur les traversées. Voici la solution très simple qui nous a été adressée par M. Delannoy, ancien élève de l'École Polytechnique.

Il y a deux cas à examiner, suivant que le bateau peut contenir quatre personnes, ou moins de quatre. Dans le premier cas, on fait passer deux ménages à la fois, et l'un d'eux revient chercher un autre couple. En répétant cette manœuvre, les n couples passeront la rivière en n voyages.

Dans le cas où le bateau ne peut contenir deux couples, le nombre x des personnes que le bateau peut au plus contenir est 2 ou 3. Alors, on est obligé de commencer par faire passer un certain nombre de femmes, ou bien un seul couple, afin de satisfaire à la condition de ne pas laisser une femme sans son mari en présence d'autres hommes. On démontre, comme à la page 10, que l'on ne peut faire passer 6 ménages avec un bateau contenant moins de quatre personnes. Il reste donc à donner le tableau de la *traversée des cinq ménages* avec un bateau contenant trois personnes.

On a au départ :

Première rive.	*Deuxième rive.*
E D C B A	. . . . .
e d c b a	. . . . .

I. — Trois femmes passent d'abord :

E D C B A	. . . . .
e d . . .	. . *c b a*

II. — Une femme (ou deux) revient et emmène la quatrième :

E D C B A	. . . . .
e	. *d c b a*

III. — Une femme revient, et trois maris rejoignent leurs femmes :

E D . . .	. . C B A
e d . . .	. . *c b a*

IV. — Un couple revient, et trois maris passent :

. . . . .	E D C B A
e d c . .	. . . *b a*

V et VI. — Une femme revient chercher successivement les trois dernières femmes :

. . . . .	E D C B A
. . . . .	*e d c b a*

En résumé, en désignant par n le nombre des ménages, par x le nombre des personnes que le bateau peut au plus contenir, et par N le nombre des voyages, on a le tableau suivant :

$n = 2$	$x = 2$	$N = 3$
$n = 3$	$x = 2$	$N = 6$
$n = 4$	$x = 3$	$N = 5$
$n = 5$	$x = 3$	$N = 6$
$n > 5$	$x = 4$	$N = n.$



NOTE II.

Sur le jeu des ponts et des îles.

Nous avons vu (p. 35) que le jeu des ponts se ramène à la description par un ou plusieurs traits continus, sans répétition, de toutes les figures formées de lignes droites ou courbes, dans le plan ou dans l'espace. Cette étude se résume dans les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Dans tout réseau géométrique formé de lignes droites ou courbes, le nombre des points impairs est toujours zéro ou un nombre pair.*

Ce théorème se trouve complètement démontré dans le mémoire d'Euler

(p. 31); on peut encore donner à la démonstration la forme suivante : Désignons par A, B, C, D, ..., les diverses stations du réseau, les divers points d'embranchement, les têtes de ligne; soient P et Q deux stations voisines, c'est-à-dire telles que l'on puisse aller de P en Q par un ou plusieurs chemins, sans rencontrer d'autres stations du réseau. Si l'on supprime l'un de ces chemins PQ, le nombre des chemins qui aboutissent en P et en Q diminue d'une unité et change de parité. Par conséquent, si P et Q sont des points impairs, ils deviennent pairs par cette suppression; si P et Q sont pairs, ils deviennent impairs; enfin si P et Q sont de parité différente, ils demeurent de parité différente. Donc la parité du nombre des points impairs ne change pas par cette suppression. Par suite, en supprimant successivement tous les chemins qui unissent deux stations voisines, jusqu'à ce qu'il n'en reste aucun, le nombre des points impairs est nul; ce nombre était donc zéro ou un nombre pair, avant la suppression.

C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème s'applique aux canevas géodésiques. Dans une chaîne de triangles, il y a toujours un nombre pair de sommets où aboutissent, en nombre impair, des angles réduits à l'horizon, tandis que le nombre des sommets où aboutissent des triangles en nombre pair peut être pair ou impair.

Théorème II. — *Tout réseau géométrique qui contient $2n$ points impairs peut être décrit par un nombre minimum de n traits sans répétition. Tout réseau géométrique, qui ne contient que des points pairs, peut être décrit par un seul trait sans répétition.*

On suppose que le réseau est continu, c'est-à-dire que l'on peut aller d'un point quelconque du réseau à un autre par un chemin continu. D'ailleurs, dans le cas de plusieurs réseaux séparés, il suffit d'appliquer à chacun d'eux les théorèmes précédents. Cela posé, si l'on part d'un point impair A et si l'on chemine au hasard, sans repasser sur la même voie, on sera forcé de s'arrêter à un certain moment; en observant que dans cette marche on ne change point la parité des stations que l'on traverse, on en conclura que le point d'arrêt est un point impair B. En supprimant le parcours AB, on obtient ainsi une figure qui ne possède plus que $(2n - 2)$ points impairs.

Après n parcours analogues, il ne restera donc qu'un réseau dont les stations sont d'ordre pair.

Maintenant, si l'on part d'un point quelconque M du réseau restreint, et si l'on chemine au hasard, on ne se trouvera arrêté qu'en revenant au point de départ M, après avoir décrit une courbe fermée. Après avoir décrit un certain nombre de boucles semblables, on aura parcouru tout le réseau. Mais, puisque le réseau est continu, ces boucles peuvent venir se souder



soit les unes sur les autres, puis sur les n chemins qui ont été décrits primitivement. Par suite, le réseau peut être décrit en n traits continus au plus.

C. Q. F. D.

REMARQUE. — Une figure dont tous les points sont pairs peut être considérée, de plusieurs façons, comme une seule courbe fermée. Cette observation trouve son emploi dans la théorie des courbes unicursales.



NOTE III.

Sur le jeu des labyrinthes.

Le problème des labyrinthes est un cas particulier du problème des ponts et des îles; en effet, puisque l'on doit parcourir deux fois chaque chemin, cela revient à la description d'un réseau qui ne contient que des points d'ordre pair. Mais, dans ce cas particulier, on peut décrire le réseau sans en connaître la forme, tandis qu'il n'en est plus de même dans le cas général.

La théorie des ramifications se ramène encore au problème d'Euler. D'ailleurs il résulte immédiatement du second théorème de la note précédente, que le nombre N, *base* de la ramification, est égal à la moitié du nombre des points impairs, c'est-à-dire du nombre l des extrémités libres augmenté du nombre des nœuds d'ordre impair. Désignons par i le nombre des nœuds d'ordre impair, par j le nombre des nœuds d'ordre pair, on a, en se reportant aux formules de la page 53,

$$N = \frac{l+i}{2} \quad \text{et} \quad p = i + j.$$

En combinant les diverses expressions du nombre N, on obtiendra quelques autres formules.

REMARQUE. — Dans le premier volume de la *Théorie des Nombres*, nous avons consacré un chapitre spécial à la *Géométrie de situation*. Ce chapitre renferme de nombreux et nouveaux développements sur le jeu des ponts et des îles et sur le jeu des labyrinthes au paragraphe intitulé : *Les Réseaux*.

On y trouve d'autres développements sur l'emploi des échiquiers arithmétiques, sur les polygones et sur les polyèdres, sur les régions et sur des théorèmes de Guthrie et d'Hamilton, de MM. Tait et G. Tarry.



NOTE IV.

Le problème des neuf reines et des dix reines.

Depuis l'apparition de notre premier volume, un géomètre distingué, M. le docteur P. H. Schoute, professeur à l'Université de Groningue, a publié, dans *Eigen Haard*, journal illustré de la Hollande, une suite d'articles ayant pour titre : *Wiskundige Verpoozingen*. On y trouve plusieurs développements des problèmes que nous avons traités. M. Schoute a donné le tableau des solutions simples du problème des neuf reines sur l'échiquier de 81 cases; mais ce tableau contient deux erreurs rectifiées par M. Delannoy, qui est fort habile dans ce genre de recherches. Le problème des neuf reines a 46 solutions simples, dont 4 semi-régulières, ce qui fait un total de 352 positions.

Si l'on supprime l'unité des quatorze premières solutions, et si l'on diminue d'une unité tous les autres chiffres, on obtient une solution du problème des huit reines. Inversement, toute solution du problème des neuf reines, dans laquelle l'une des diagonales ne contient pas de reine, donne naissance à deux solutions du problème des dix reines, en ajoutant une reine à l'un des coins extérieurs de cette diagonale. La solution 358297146, qui n'a pas de reine sur l'une ou l'autre des diagonales, donne quatre solutions simples du problème des dix reines; on en trouve ainsi 32. M. Delannoy a dressé le tableau des solutions du problème des dix reines; il y a 92 solutions simples dont 3 semi-régulières; donc, en tout, 724 positions. Dans ce tableau, la dixième ligne est désignée par o.

1° *Tableau des solutions simples du problème des neuf reines.*

136824975	248396157	279631485
137285946	249731685	281479635
138692574	249753168*	285396417
146392857	257936418	286931475
146825397	257948136	358296174
147382596	258136974	358297146
147925863	258196374	359247186
148397526	258693147	362951847*
157938246	258693174	368159247*
157942863	259418637	368519724
159642837	261379485	369741825
168374295	261753948*	372859164
174835926	261958473	386192574
174839625	263184975	427918536
241796358	269358417	
247139685	275194683	

2° *Tableau des solutions simples du problème des dix reines.*

1368059247	1683792504	2630859417	3591607248
1369704258	1680493572	2683195047	3592074186
1369704285	1693842057	2683740195	3594108627
1397042586	1693074258	2691853074	3620195847
1469308257	1695084273	2697013584	3640195827
1470295386	1603794258	2603794158	3681470295
1470392586	1796308524	2793804615	3680195247
1470692538	1849730625	2706195384	3680415297
1470825369	1869304752	2839750164	3691470258*
1470835926	2468013579*	2859160374	3691470825
1470852936	2483960175	2803964175	3691057248
1495803627	2480596137	2804159637	3728610594
1497203685	2497501683	2918530746	3827105964
1497036258	2407963185	2938046157	3862051497
1407935286	2571069384	2930741586	3869105724
1570429368	2581703649	2950146837	3801625794
1580372469	2584703169	2961307485	3960271485
1580742963	2586307149	2963041857	4259108637
1506924738	2580369147	2968013574	4280136975
1647039258	2591047386	2973085146	4695013827
1647082539	2594086317	2970415863	4835[illegible]19627
1649730258	2637019584	3528074196	4852[illegible]17936
1640793528	2637085149	3570461928	4859102637*

Depuis quelques années, de nouveaux et nombreux résultats ont été obtenus sur le problème des tours (p. 66), sur le problème des fous (p. 69), et sur celui des reines. Cependant, on n'a pu trouver jusqu'à présent des formules générales pour les problèmes des fous et des reines, tandis que l'on peut obtenir complètement la solution de diverses questions sur le problème des tours, en s'imposant certaines conditions. Dans notre Mémoire *Sur l'Arithmétique figurative* (Congrès de Rouen, 1883), nous avons donné d'une manière générale les nombres des solutions du problème des tours ou des *permutations figurées* dans les cas suivants :

1° *Solutions symétriques par rapport au centre de l'échiquier;*
2° » » » *à une diagonale;*
3° » » » *aux deux diagonales;*
4° *Solutions qui coïncident avec elles-mêmes en faisant tourner l'échiquier d'un quart de tour;*

5° *Solutions n'ayant aucune tour sur une diagonale;*

6° *Solutions symétriques par rapport à une diagonale et n'ayant aucune tour sur cette diagonale;*

7° *Solutions symétriques par rapport au centre et n'ayant aucune tour sur l'une des diagonales;*

8°, 9° *Solutions symétriques par rapport aux deux diagonales et ne contenant aucune tour sur une ou sur deux diagonales.*

En particulier, le cinquième cas, traité par Euler, donne la solution du fameux et difficile *problème des rencontres*, qui revient à déterminer le nombre des permutations de *n* éléments dans lesquelles chacun des éléments ne peut occuper la place qu'il occupe dans l'ordre naturel. On doit surtout remarquer dans notre travail la très élégante méthode indiquée par M. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Celle-ci s'applique à un grand nombre d'autres problèmes et, en particulier, à l'étude des arrangements *discordants* d'un arrangement donné, c'est-à-dire des arrangements tels que chacun des éléments occupe une place différente de celle qu'il occupe dans un arrangement désigné à l'avance. Il y a lieu de chercher encore le nombre des arrangements discordants de deux arrangements donnés et, en particulier, le nombre des permutations figurées n'ayant aucune tour sur une diagonale, ni sur une ligne parallèle obtenue en élevant toutes les cases de cette diagonale d'un même nombre de rangées. Plus particulièrement, le problème de déterminer toutes les solutions du problème des tours, n'ayant aucune tour sur une diagonale et sur la parallèle contiguë, revient au *Problème des n ménages* que l'on énonce ainsi : *Des femmes en nombre n sont assises dans un ordre déterminé autour d'une table ronde; de combien de manières leurs maris peuvent-ils se placer, de telle sorte que chaque homme soit placé entre deux femmes, mais sans se trouver immédiatement à la droite ou à la gauche de la sienne?* — On observera que si l'on n'impose qu'une seule condition, à savoir que le mari ne peut se trouver à la droite (ou à la gauche) de sa femme, afin d'éviter le mariage de la main droite ou de la main gauche, le problème des ménages revient à celui des rencontres. Il fallait donc résoudre le problème des rencontres avant celui des ménages.

Nous avons encore démontré que, sur l'échiquier de n^2 cases, on peut placer un nombre maximum de fous égal à $2n-2$, de 2^n manières différentes, en supposant que deux fous quelconques ne soient pas en prise. Dans ce cas, les fous doivent toujours être placés sur les bords de l'échiquier.

Enfin, nous avons fait voir que, dans le problème des tours, le nombre des tours placées sur les cases de même couleur que celle des cases de la diagonale principale est toujours un nombre pair.

Dans le même volume du Compte rendu de l'Association française, au



Congrès de Rouen, nous devons encore signaler les intéressants Mémoires de MM. Mantel et Parmentier. Dans son travail sur *les Combinaisons d'éléments dispersés dans un plan*, M. Mantel, professeur à Delft, a déterminé le nombre X_2 des manières distinctes de placer *deux* reines, non en prise, sur un échiquier de n^2 cases, et a donné la formule

$$X_2 = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)(3n-1)$$

Il a montré que le nombre des manières de placer p reines non en prise, sur l'échiquier de n^2 cases, en supposant $p < n$, peut être représenté par un polynôme en n de degré $2p$.

Dans son Mémoire sur le *problème des n reines*, M. le général Parmentier a donné le tableau complet des solutions pour $n = 7, 8, 9$. En outre, il a donné les nombres des solutions du problème des reines énoncé à la page 81, pour 9 reines. En plaçant les nombres des solutions dans les cases qui correspondent à la position initiale d'une première reine, on forme ainsi pour les échiquiers de 8^2 et 9^2 cases, les figures suivantes :

Fig. 22 *bis*.

			8
		4	12
	16	14	8
4	8	16	18

Fig. 22 *ter*.

				40
			36	20
		28	38	38
	32	44	48	44
28	30	47	44	54

Au lieu de se donner une seule position initiale, on peut prendre les positions initiales de deux reines. En particulier, il existe des groupes de positions de deux reines pour lesquels le problème des huit reines est impossible. En complétant la notation de l'échiquier, d'après la *fig.* 22 (p. 81), et en ne considérant que les positions de deux reines non en prise, on trouve que

le problème des huit reines est impossible lorsque l'on se donne comme cases initiales

11 *avec* 23, 24, 28, 36, 37, 45, 47, 56, 68, 78;
12 *avec* 55, 57, 63, 66, 74, 75, 86, 87;
13 *avec* 36, 52, 76;
14 *avec* 53;
23 *avec* 36, 66;
24 *avec* 47, 63, 66, 75;
34 *avec* 46, 75,

ou des positions symétriques par rapport à une diagonale; d'autre part, avec la case 11, on peut choisir de 35 manières différentes une autre case, de telle

Fig. 22 *quater*.

4	.	1	2	5	6	.	3
.	3	5	6	1	2	4	.
5	1	.	4	3	.	6	2
6	2	3	.	.	4	5	1
3	5	6	.	.	1	2	4
2	4	.	1	6	.	3	5
.	6	2	3	4	5	1	.
1	.	4	5	2	3	.	6

sorte que le problème des huit reines soit possible, en ajoutant six reines aux deux premières.

On peut encore se proposer cet autre problème de superposer, sans con-



usion, plusieurs solutions du problème des reines. Ainsi, pour l'échiquier de 8^2 cases, on peut superposer jusqu'à six positions du problème des huit reines; en particulier, nous avons trouvé la solution suivante, dans laquelle les mêmes chiffres correspondent à une même solution du problème des reines. On résout ainsi la question suivante : Étant donnés 6 groupes de 8 jetons et de couleurs différentes, placer les 48 jetons sur les cases d'un échiquier ordinaire, de telle sorte que deux jetons de même couleur ne puissent se trouver sur une même ligne horizontale, verticale ou diagonale.

On peut encore superposer, mais d'une façon moins symétrique, les six solutions qui correspondent aux numéros de la page 79, à savoir :

8, 15, 43, 50, 78, 85,

ou encore

2, 13, 31, 62, 80, 91.

Dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (tome XI), M. Perott a ajouté une contribution importante au problème des tours et à celui des fous. En particulier, il a trouvé que sur les 32 cases blanches (ou noires) de l'échiquier ordinaire, on peut placer r fous, non en prise, pour $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, de f_r manières différentes. Les nombres r et f_r sont donnés dans le tableau (p. 229).

r :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7;
f_r :	32,	356,	1704,	3532,	2816,	632,	16;

d'ailleurs $f_r = 0$ pour $r > 7$. En outre, si n désigne l'un des quatorze premiers entiers, le nombre F_n de manières de placer n fous, non en prise, sur l'échiquier ordinaire de 64 cases, est donné par la formule

$$F_n = f_n + f_1 f_{n-1} + f_2 f_{n-2} + \ldots + f_{n-1} f_1 + f_n.$$

Ainsi pour $n = 8$, *on peut placer huit fous, non en prise, sur l'échiquier ordinaire, de* 22 522 960 *manières différentes.*

M. le docteur Pein, professeur à la *Realschule* de Bochum, a repris d'une manière complète l'historique et l'exposé des diverses méthodes du problème des reines [1].

Dans cet ouvrage de 62 pages in-4°, on trouve sept planches gravées donnant les figures de toutes les positions du problème des n reines pour $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. L'auteur nous apprend que c'est à Gauss que l'on doit la méthode que nous avions attribuée à M. Laquière. Dans une lettre à Schumacher, datée de 1850, Gauss a encore indiqué le moyen de faciliter

[1] AUGUST PEIN. — *Aufstellung von n Königinnen auf einen Schachbrette von n^2 Feldern, von $n = 4$ bis $n = 10$.* — Leipzig, Teubner; 1889.

le triage des positions des reines par l'emploi de cartons mobiles découpés en étoiles et servant à masquer les cases commandées par la position d'une reine.

Au mois d'octobre 1889, M. Claude Botton nous adressait de Montvazon, près Valognes, les résultats de ses recherches sur le nombre des solutions du problème des *onze* reines et des observations intéressantes sur la filiation ou la généalogie des solutions quand on passe d'un échiquier de n^2 cases à l'échiquier de $(n+1)^2$ cases. En même temps, M. Henri Tarry, ancien élève de l'École Polytechnique, inspecteur des finances à Alger, nous envoyait le tableau des solutions simples du problème des onze reines. Les résultats trouvés par nos deux collaborateurs sont identiques. Il existe 341 solutions simples du problème des onze reines, parmi lesquelles 12 sont semi-régulières, ce qui fait un total de 2680 solutions.

M. Tarry a présenté au congrès de Limoges (1890) les tableaux de ses calculs; en outre, il a dressé le tableau des solutions qui commencent par 1 dans le problème des *douze* reines; il en a trouvé 248 qui correspondent à 124 solutions simples. De plus, il a donné des formules qui permettent de calculer le nombre de positions que peuvent occuper les deux, trois, quatre, cinq *premières reines*, sur l'échiquier de n^2 cases. Ainsi, sur l'échiquier de deux cases de largeur et de n cases de hauteur, en supposant $n \gtreqless 4$, le nombre des positions de deux reines non en prise est égal à

$$(n-1)(n-2);$$

sur l'échiquier de trois cases de largeur et de n cases de hauteur, en supposant $n \gtreqless 6$, le nombre des positions de trois reines non en prise est égal à

$$(n-3)(n^2-6n+12);$$

sur l'échiquier de quatre cases de largeur et de n cases de hauteur, en supposant $n \gtreqless 8$, le nombre des positions de quatre reines non en prise est égal à

$$n^4-18n^3+139n^2-534n+840.$$

Pour compléter ces renseignements, nous ajouterons que nous avons publié sur le sujet qui nous occupe, au point de vue de l'exécution pratique, sans voir l'échiquier, deux articles dans les numéros 697 et 701 du journal *la Nature* de M. Gaston Tissandier. Mais, malgré tant d'efforts, la solution générale du problème des n reines est loin d'être connue; cependant, dans une Note qui termine l'opuscule de M. le général Frolow [1], naus avons

[1] Frolow. *Les carrés magiques, nouvelle étude*, avec des Notes par MM. Delannoy et Ed. Lucas. Paris, Gauthier-Villars; 1886.

démontré que le nombre des solutions ordonnées du problème des n reines, par progression arithmétique (*voir* p. 83-86), est égal à la fonction numérique

$$\frac{n^2}{abc\ldots}(a-3)(b-3)(c-3)\ldots,$$

dans laquelle a, b, c, ..., désignent les différents facteurs premiers qui divisent n.



NOTE V.

Sur le Solitaire à 41 *cases.*

Nous avons donné aux pages 117, 118, 131 et 132 quelques développements sur le solitaire à quarante et une cases. Mais, depuis, on est parvenu à la solution complète des possibilités et des impossibilités des réussites, en prenant une case initiale quelconque (*fig.* 31, p. 117). Au mois d'avril 1883, M. Mantel, professeur à Delft, nous a adressé la réussite suivante, en prenant **13** pour case initiale et **42** pour case finale.

$$\frac{15}{13}, \frac{34}{14}, \frac{04}{24}, \frac{54}{34}, \frac{\mathbf{24}^*}{\mathbf{26}}, \frac{\mathbf{35}^*}{\mathbf{37}}, \frac{\mathbf{46}^*}{\mathbf{48}}, \frac{74}{54}, \frac{66}{64}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \frac{63}{65}, \frac{43}{63}, \frac{62}{64}, \frac{54}{74},$$

$$\frac{84}{64}, \frac{\mathbf{55}^*}{\mathbf{75}}, \frac{65}{63}, \frac{73}{53}, \frac{23}{43}, \frac{43}{63}, \frac{51}{53}, \frac{31}{33}, \frac{63}{43}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \frac{41}{43}, \frac{34}{32}, \frac{22}{42}, \frac{43}{41}, \frac{40}{42}.$$

Au mois de février 1887, M. Chicandard, pharmacien à Paris, nous a adressé deux autres réussites, en prenant **37** pour case initiale et **37** ou **64** pour case finale; elles contiennent sept coups triples et débutent ainsi :

$$\frac{37}{57}, \frac{45}{47}, \frac{26}{46}, \frac{34}{36}, \frac{15}{35}, \frac{\mathbf{04}^*}{\mathbf{24}}, \frac{\mathbf{13}^*}{\mathbf{33}}, \frac{36}{34}, \frac{31}{33}, \frac{52}{32}, \frac{22}{42},$$

$$\frac{34}{32}, \frac{32}{52}, \frac{62}{42}, \frac{54}{52}, \frac{73}{53}, \frac{\mathbf{40}^*}{\mathbf{42}}, \frac{\mathbf{51}^*}{\mathbf{53}}, \frac{43}{45}, \frac{\mathbf{46}^*}{\mathbf{48}}, \frac{\mathbf{64}^*}{\mathbf{84}}, \frac{\mathbf{55}^*}{\mathbf{75}}.$$

Elles se terminent par l'une ou l'autre des opérations

$$\frac{66}{46}, \frac{45}{47}, \frac{57}{37}, \quad \text{ou} \quad \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{66}{64}.$$

Les huit derniers coups de la réussite de M. Hermary, que nous avons décrite à la page 118, peuvent être remplacés par les six derniers de la réussite de M. Chicandard. En rapprochant ces divers résultats, on voit que l'on obtient particulièrement les solutions théoriques possibles en prenant pour case initiale ou finale **13**, **24** et toutes celles qui correspondent par rotation ou par symétrie. Il nous reste à démontrer que les autres solutions, théoriquement possibles, ne peuvent être réalisées sur le solitaire restreint. Supposons que les cases du solitaire soient garnies alternativement des couleurs blanche et noire, et que la case 44 soit noire. Dans chaque coup simple du solitaire, un pion quelconque ne peut prendre qu'un ou plusieurs pions situés sur une ou plusieurs cases de couleur opposée à celle de la case qu'il occupe, pour venir se placer sur une case de même couleur que la sienne. Mais le solitaire de quarante et une cases renferme seize cases blanches, et seize cases noires sur le pourtour; si l'on prend une case blanche pour case initiale de la réussite, il reste quinze boules sur cases blanches et seize sur les cases noires du pourtour; d'autre part, les boules situées sur les cases du pourtour ne peuvent être prises avant d'avoir été déplacées, c'est-à-dire avant d'avoir pris un nombre de boules, au moins égal, situées sur des cases blanches. Par conséquent, quelle que soit la manœuvre, il restera au moins deux boules sur les cases noires du pourtour.

Ce criterium d'impossibilité peut s'appliquer à des solitaires de forme quelconque et peut s'énoncer ainsi : *Lorsqu'un solitaire contient des cases de même couleur garnies de boules qui ne peuvent être prises qu'après avoir été déplacées et que le nombre de ces cases n'est pas plus petit que celui des cases de couleur opposée, la réussite est impossible en prenant pour initiale une case de cette couleur opposée.*

Ainsi, pour le solitaire de 41 cases, la réussite est impossible lorsque l'on prend pour case initiale une case de couleur opposée à celle de **44**. De même, la réussite est encore impossible, lorsque l'on prend pour initiale l'une des cases **04**, **40**, **48**, **84**, attendu, qu'après le premier coup, on est ramené au cas précédent. Il en est de même lorsque l'on prend pour initiale l'une des cases **22**, **26**, **62**, **66**.

La démonstration précédente, due à M. Mantel, complète ainsi la solution du problème des réussites sur l'échiquier de quarante et une cases.

Il reste à élucider la question du solitaire de trente-neuf cases dont nous avons parlé dans la remarque de la page 139.

Nous donnerons une autre méthode pour obtenir les Réussites du solitaire à 41 cases; cette jolie solution nous a été adressée par M. Paul Redon, au mois de juin 1888. Les réussites possibles sont comprises dans le tableau suivant.

Tableau des vingt-huit réussites du Solitaire à 41 cases.

N°s	CI.	CF.	OBSERVATIONS.
1	13	15	Symétrique inclinée du n° 9. . . . . .
2	»	42	Symétrique inclinée du n° 8. . . . . .
3	15	13	Symétrique inclinée du n° 18 . . . . .
4	»	46	Symétrique inclinée du n° 19 . . . . .
5	24	31	*Réussite C.*
6	»	37	Symétrique horizontale du n° 5 . . . .
7	»	64	*Réussite D.*
8	31	24	Symétrique verticale du n° 19. . . . .
9	»	51	Symétrique verticale du n° 18. . . . .
10	37	24	Symétrique centrale du n° 19. . . . .
11	»	57	Symétrique centrale du n° 18. . . . .
12	42	13	Symétrique inclinée du n° 5. . . . . .
13	»	46	Symétrique inclinée du n° 7. . . . . .
14	»	73	Symétrique inclinée du n° 6. . . . . .
15	46	15	Symétrique inclinée du n° 23. . . . .
16	»	42	Symétrique inclinée du n° 22. . . . .
17	»	75	Symétrique inclinée du n° 24. . . . .
18	51	31	*Réussite A.*
19	»	64	*Réussite B.*
20	57	37	Symétrique horizontale du n° 18. . . .
21	»	64	Symétrique horizontale du n° 19. . . .
22	64	24	Symétrique verticale du n° 7. . . . . .
23	»	51	Symétrique verticale du n° 5. . . . . .
24	»	57	Symétrique centrale du n° 5. . . . . .
25	73	42	Symétrique inclinée du n° 10 . . . . .
26	»	75	Symétrique inclinée du n° 11 . . . . .
27	75	46	Symétrique inclinée du n° 21 . . . . .
28	»	73	Symétrique inclinée du n° 20 . . . . .

Il nous reste à exposer la succession des coups pour les Réussites A, B, C, D, portant les numéros 18, 19, 5, 7.

Réussite A. — De **51** à **31**. — On joue d'abord les treize coups suivants, dont deux triples :



$$\frac{31}{51}, \frac{43}{41}, \frac{22}{42}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{\mathbf{04}^*}{\mathbf{24}}, \frac{\mathbf{15}^*}{\mathbf{35}}, \frac{32}{34}, \frac{37}{35}, \frac{56}{36}, \frac{26}{46}, \frac{34}{36}, \frac{36}{56}.$$

On ajoute ensuite les trois coups

$$\frac{48}{46}, \frac{45}{43}, \frac{\mathbf{40}^*}{\mathbf{42}}.$$

Enfin, on joue les treize coups suivants, symétriques des treize coups du début. On les obtient en écrivant les treize fractions dans l'ordre inverse, et en retranchant de 8 les premiers chiffres des deux termes de chaque fraction.

$$\frac{56}{36}, \frac{54}{56}, \frac{66}{46}, \frac{36}{56}, \frac{57}{55}, \frac{52}{54}, \frac{\mathbf{75}^*}{\mathbf{55}}, \frac{\mathbf{84}^*}{\mathbf{64}}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}, \frac{43}{41}, \frac{51}{31}.$$

Réussite B. — De **51** à **64**. — Remplacer les trois derniers coups de la réussite précédente par

$$\frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{62}{64}.$$

Réussite C. — De **24** à **31**. — Remplacer, dans la réussite A, les trois premiers coups par

$$\frac{22}{24}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}.$$

Réussite D. — De **24** à **64**. — Remplacer, dans la réussite B, les trois premiers coups par les trois premiers de la réussite C.

NOTE VI.

Sur les nombres parfaits.

Nous avons vu (p. 158) que les nombres parfaits proviennent des nombres premiers de la forme $N = 2^n - 1$.

Dans la Préface générale des *Cogitata physico-mathematica*, Mersenne affirme que les nombres premiers N correspondent aux valeurs

$$n = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.$$

et qu'il n'en existe pas d'autres pour n plus petit que 257. Il résulte de ce curieux passage, remis en lumière par M. Genocchi, que Mersenne était en possession d'une méthode importante dans la théorie des nombres; mais cette méthode ne nous est point parvenue. En cherchant à vérifier l'assertion précédente, nous avons d'abord rencontré le théorème suivant :

Si $n = 4q + 3$ *est un nombre premier, en même temps que* $2n + 1$, *le nombre* $N = 2^n - 1$ *est divisible par* $2n + 1$. Par suite, en consultant la table des nombres premiers, on en conclut que, pour les valeurs de n successivement égales à

$$11, 23, 83, 131, 179, 191, 239, 251,$$

le nombre N n'est pas premier. Pour d'autres valeurs du nombre premier n, Fermat a trouvé que $2^{37} - 1$ est divisible par 223; Plana a trouvé que $2^{41} - 1$ est divisible par 13 367; M. Landry a trouvé que les nombres $2^{43} - 1$, $2^{47} - 1$, $2^{53} - 1$, $2^{59} - 1$, sont respectivement divisibles par 431, 2351, 6361 et 179 951; enfin M. Le Lasseur a montré que, pour les exposants n

$$73, \quad 79, \quad 97, \quad 113, \quad 151, \quad 211, \quad 223, \quad 233,$$

les nombres $2^n - 1$ sont respectivement divisibles par

$$439, \quad 2687, \quad 11447, \quad 3391, \quad 18121, \quad 15193, \quad 18287, \quad 1399.$$

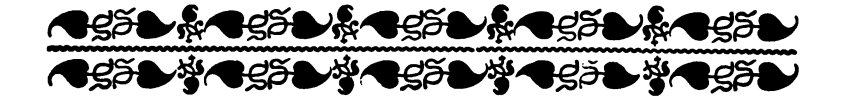
De plus, M. Seelhoff, de Brême, a démontré que $2^{61} - 1$ est premier, ce qui donne le *neuvième* nombre parfait.

Il reste donc à déterminer la nature des nombres N pour les *vingt-trois* exposants

$$67, 71, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157,$$
$$163, 167, 173, 181, 193, 197, 199, 227, 229, 241, 257.$$

Pour vérifier la dernière assertion de Mersenne, sur le nombre supposé premier $2^{257} - 1$, et qui a 78 chiffres, il faudrait, en se servant des anciennes méthodes, que l'humanité, formée de mille millions d'individus, calculât simultanément et sans interruption, pendant un temps au moins égal à un nombre de siècles représenté par un nombre de vingt chiffres. Nous avons indiqué dans notre *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*Journal de Sylvester*, t. I, p. 304; Baltimore, 1878), une nouvelle méthode qui permettait à une seule personne de résoudre la question en moins de trois mois, avec l'*Arithmomètre de Thomas*.



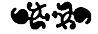


INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

> Finito libro, sit laus et gloria Christo!
> Detur pro pœna scriptori pulcra puella.
> Penna, precor, cessa, quoniam manus est mihi fessa,
> Explicit hic totum, pro pœna da mihi potum.

Les joyeux vers qui précèdent sont placés à la fin de plusieurs manuscrits conservés à Dresde et à Padoue et qui ont pour titre : *Solatium ludi Scacchorum, scilicet regiminis ac morum hominum, et officium Virorum Nobilium, quorum formas si quis menti impresserii, bellum ipsum, et Ludi virtutem corde faciliter poterit obtinere.* C'est l'œuvre d'un moine picard, de l'ordre des Frères Prêcheurs, Jacobus de Cessolis, né à Césoles, au xiiie siècle. La Bibliothèque Nationale de Paris possède plusieurs manuscrits de cet auteur, sur le jeu des échecs, sous le titre : *Moralitates super ludo Scacchorum,* nos 3234, 4319, 6287, 6492, 6493, 6705 à 6709, 6782, 6783 du fonds latin.

Nous donnons ci-après, suivant l'ordre chronologique, l'indication des principaux livres, mémoires, extraits de correspondance, qui ont été publiés sur l'Arithmétique de position et sur la Géométrie de situation. Nous avons surtout choisi les documents qui se rapportent aux sujets que nous avons traités ou que nous traiterons ultérieurement.



XVIe SIÈCLE.

CHUQUET. — *Jeux et Esbatemens qui par la science des nombres se font.* — Fos 206-210 d'un manuscrit de la Bibliothèque Nationale (1346 du Fds Français) intitulé : *Triparty en la science des nombres.* On y trouve la notation des exposants et la règle des signes (1484).

LUCAS DE BURGO. — *Euclidis opera a Campano interprete fidissime translata Lucas Paciolus, theologus insignis, altissima mathematicarum disciplinarum scientia rarissimus, judicio castigatissimo detersit.* Venetiis, 1509.

DAMIANO. — *Livro da imparare giuocare a Scacchi,* etc. Romæ, 1512. — On attribue à cet auteur portugais le coup du *gambit,* qui consiste à sacrifier, au troisième coup de la partie d'échecs, le cavalier du roi.

ALBERT DÜRER donne dans la *Melencholia,* gravée en 1514, la figure d'un carré magique de seize cases.

S'ENSUIT JEUX, *partis des Eschez, composez nouvellement pour récréer tous nobles cueurs et pour éviter oysiveté à ceulx qui ont voulonté, désir et affection de le sçavoir et apprendre, et est appelé ce Livre, le jeu des Princes et Damoiselles.* Paris, vers 1530. — On y trouve la course du cavalier sur la moitié (32 cases) de l'échiquier ordinaire.

AGRIPPA VON NETTESHEIM. — *De occulta philosophia libri tres.* Coloniæ, 1533.

DE BOUVELLES. — *Livre singulier et utile, touchant l'art et practique de Géométrie, nouvellement en françoys, par maître Charles de Bouvelles, chanoyne de Noyon.* Paris, 1542. — *Caroli Bovilli Samarobrini Geometricum opus duobus libris comprehensum.* Lutetiæ, 1557.

Propositiones arithmeticæ ad acuendos juvenes. — Cet ouvrage, imprimé sous le nom de BÈDE, en 1543, inséré dans les Œuvres d'ALCUIN, par l'abbé de Saint-Emeran, en 1777, doit être considéré, d'après Montucla (*Histoire des Mathématiques,* t. I, p. 496), comme le germe des Récréations mathématiques.

STIEFEL. — *Arithmetica integra.* Norimbergæ, 1544.

RIESE. — *Rechenung nach der lenge, auff der Linichen und Feder.* Leipzig, 1550.

CARDAN. — *De subtilitate libri XXI.* Norimbergæ, 1550. — Cet ouvrage a été traduit en français par Richard Leblanc, sous le titre : *Les Livres d'Hieronymus Cardanus, de la Subtilité et subtiles Inventions, ensemble les causes occultes et les raisons d'icelles.* Paris, 1556.

TARTAGLIA. — *Quesiti et inventioni diverse.* Venetia, 1554.

Rythomachiæ, sive Arithmomachia ludi mathematici ingeniosissimi descriptiones duæ. Erphordiæ, 1577.

GIANUTIO DELLA MANTIA. — *Libro nel quale si tratta della maniera di*

giuocar a scacchi, con alcuni sottilissimi partiti. Turin, 1597. — On y trouve une course du cavalier sur le demi-échiquier de 32 cases; en prenant la symétrique, et en réunissant les deux courses, on obtient un circuit donné par Euler, deux siècles plus tard.

Monanteuil. — *Ludus astromathematicus.* Paris, 1597.

Diego Palomino a publié un ouvrage sur les carrés magiques. Madrid, 1599.

XVIIe SIÈCLE.

Bachet de Méziriac. — *Problesmes plaisans et délectables qui se font par les nombres.* Paris, 1612. Deuxième édition, en 1624. Troisième et quatrième, par Labosne, en 1874 et en 1879, à Paris.

D. H. P. E. M. (D. Henrion, professeur ès mathématiques). — *Deux cens questions ingénieuses et récréatives, extraictes et tirées des œuvres mathématiques de Valentin Menher, Allemand, avec quelques annotations de Michel Coignet sur aucune d'icelles questions.* Paris, 1620.

Van Etten. — *Récréation mathématique.* Paris, 1626.

Schwenter. — *Deliciæ physico-mathematicæ.* Norimbergæ, 1626. — Cet ouvrage a été augmenté de deux volumes en 1651, par Harsdorffer.

Récréations mathématiques composées de plusieurs problèmes d'Arithmétique, Géométrie, etc. Rouen, 1628.

Remmelin. — *Adyta numeri reclusa.* Kempten, 1629.

Mersenne. — *Questions inouyes, ou récréation des sçavants.* Paris, 1633.

Winant van Westen. — *Récréations mathématiques contenant plusieurs problèmes,* etc. Nimègue, 1636.

Bettinus. — *Apiaria universæ philosophiæ mathematicæ.* Bononiæ, 1645. — Un troisième volume en 1656.

Caspar ens. — *Thaumaturgus mathematicus.* Coloniæ, 1636 et 1651.

Forsetzung der mathematischen und philosophischen Erquickstunden. Nürnberg, 1651. — Le même, avec figures, 1653.

Leake. — *Mathematical recreations.* London, 1653.

La maison académique contenant un recueil général de tous les jeux divertissans pour se réjouyr agréablement dans les bonnes compagnies. Paris, 1654. — Dans son *Dictionnaire des ouvrages anonymes,* Barbier attribue ce livre au sieur de la Marinière.

Bettinus. — *Recreationum mathematicarum apiaria novissima duo cim, accessit Coronidis loco appendix.* Bononiæ, 1658



Aureoli Philippi Theophrasti Paracelsi ab Hohenheim opera. Genevæ, 1658.

SCHOTT. — *Cursus mathematicus.* Herbipoli, 1661. — Ce volume contient, sous le titre : *Arithmetica divinatoria,* des problèmes plaisants et délectables.

FÜRSTENBACH. — *Mannhafter Kunstpiegel.* Augsburg, 1663.

SCHOTT. — *Technica curiosa, seu mirabilia artis.* Norimbergæ, 1664.

KIRCHER. — *Arithmologia sive de abditis Numerorum mysteriis.* Romæ, 1665.

OUGHTRED. — *Mathematical recreations lately compiled by H. Van Etten, invented and written by W. Oughtred.* London, 1667.

La maison des jeux académiques contenant un recueil général de tous les jeux divertissans pour se réjouir et passer le temps agréablement. Paris, 1668.

Récréations mathématiques, composées de plusieurs problèmes plaisans et facétieux, etc. Lyon, 1669 et 1680.

BLIERSTROP. — *Arithm. geom. quadrat. cubic und costische Erquickstunden.* Glückstadt, 1670.

LEYBOURN. — *Arithmetical Recreations.* London, 1676.

KNORR VON ROSENROTH. — *Kabbala denudata.* Sulzbaci, 1677.

FERMAT. — *Varia opera mathematica.* Tolosæ, 1679.

E. W. — *Ludus mathematicus.* London, 1682.

KOCHANSKI. — *Considerationes quædam circa Quadrata et Cubos magicos, nec non aliquot Problemata omnibus Arithmophilis ad investigandum proposita (Acta Eruditorum,* p. 391), 1686.

LA LOUBÈRE. — *Du Royaume de Siam.* Amsterdam, 1691. — On y trouve des renseignements sur les carrés magiques des Indiens.

DANXT. — *Arithm. geom. algebr. und historische Ergötzlichkeiten.* Copenhague, 1691.

FRÉNICLE DE BESSY. — *Des Quarrés ou Tables magiques. Table générale des quarrés magiques de quatre (Mém. de l'Acad. Roy. des Sc.,* depuis 1666 jusqu'à 1699, t. V, p. 209 et 303). Paris, 1729.

OZANAM. — *Récréations mathématiques.* Paris, 1694. — Cet ouvrage a eu beaucoup d'éditions avec additions successives.

Divertissemens innocens contenant les règles du jeu des échecs, du billard, etc. La Haye, 1696.

XVIII° SIÈCLE.

POIGNARD. — *Traité des Quarrés sublimes.* Bruxelles, 1704.

R. P. SÉBASTIEN TRUCHET. — *Mémoire sur les combinaisons* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc.* pour l'année 1704, p. 363). Paris, 1706.

DE LA HIRE. — *Nouvelles constructions et considérations sur les quarrés magiques, avec leurs démonstrations.* — *Construction des quarrés magiques dont la racine est un nombre pair* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc.* pour l'année 1705, p. 167). Paris, 1706.

DE MONTMORT. — *Essai d'analyse sur les jeux de hasard.* Paris, 1708 et 1714.

SAUVEUR. — *Construction générale des quarrés magiques* (*Mém. de l'Acad. des Sc.* pour l'année 1710, p. 92). Paris.

LEIBNIZ. — *Annotatio de quibusdam ludis imprimis de ludo quodam Sinico, differentiaque scacchici et Latrunculorum* (*Misc. Soc. reg.*, t. I.) Berlin, 1710. Voir aussi *Leibnizii Epistol. a Kortholto editis*, t. II, p. 278, et *Fellerii monum. inedit.*, p. 642.

PESCHECK. — *Alte und neue arithmetische und geometrische Erquickstunden und Ergötzlichkeiten.* Budithin, 1716.

LEIRTIC. — *Ludus mathematicus, sive crux geometrica.* Jenæ, 1716.

HALKEN. — *Delciæ mathematicæ.* Hamburg, 1719.

Otia mathematica. Salisbury, 1719.

MAIER. — *De arithmetica figurata ejusque usibus aliquot* (*Comm. Acad. Petropol.*, t. III). Saint-Pétersbourg, 1735.

STAMMA. — *Essai sur le jeu des échecs.* Paris. 1737.

ROHLFS. — *Künstliches Zahlenspiel oder gründliche Anweisung, wie die sogenannten magischen Quadrate zu verfertigen.* Buxtehude, 1742.

ROST. — *Mathematischen Lost und Nutzgarten.* Nürnberg, 1745.

RESSING. — *Arithmetischer und algebraischer Zeitbertreib.* Hamburg, 1747.

Les Amusements mathématiques. Paris et Lille, 1749.

D'ONS EN BRAY. — *Méthode facile pour faire tels quarrés magiques que l'on voudra* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris* pour l'année 1750).

ARNAUD. — *Nouveaux éléments de géométrie.* Paris, 1758.

EULER. — *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (*Mém. de l'Acad. des Sc.*). Berlin, 1759.

EULER. — *Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse* (*Hist. de l'Acad. des Sc. de Berlin*, t. XV, p. 310).

EULER. — *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (*Nov. Comm. Acad. Petrop.*, t. XV, p. 75).

Euler. — *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques* (*Mém. de la Soc. des Sc. de Flessingue*, t. IX, p. 85).

Bonaventure. — *Amusements philosophiques*. Amsterdam, 1763.

Rallier des Ourmes. — *Mémoire sur les quarrés magiques* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris* pour l'année 1763).

Benjamin Franklin. — *Experiments and observations on Electricity... to which are added Letters and Papers on philosophical subjects*. London, 1764.

Veritas quadrata mathematica, physica, philologica, theologica. Amstelodami, 1765.

Lelio della Volpe. — *Corsa del cavallo per tutt'i scacchi dello scacchiere*. Bononia, 1766.

Capito. — *Alle magischen Quadrattafeln zu verfertigen, d. i. die Zahlen aller geraden und ungeraden Quadraten gründlich auszurechnen, leicht zu ordnen, und viele Millionenmal eben so leicht zu verändern, dass sie in die Länge, Breite und uber's Creutz einerlei, und die verlangte Summe bringen*. Gluckstadt, 1767.

Vandermonde. — *Remarques sur les problèmes de situation* (*Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris* pour l'année 1771, p. 566).

Guyot. — *Nouvelles récréations physiques et mathématiques*. Paris, 1772.

Monge. — *Réflexions sur un tour de cartes* (*Mém. des Sav. étr.*, t. VII, p. 390). Paris, 1773.

Collini. — *Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs*. Mannheim, 1773; chez Tobie Leffler, au Chandelier d'Or.

Hutton. — *Miscellanea mathematica*. London, 1775.

Chaula. — *Récréations mathématiques*. Paris, 1778. — Cet ouvrage est attribué à Montucla.

Luya. — *Amusements arithmétiques et algébriques de la campagne*. Genève, 1779.

Ballière de Laisement. — *Essai sur les problèmes de situation*. Rouen, 1782.

Fontana. — *Opuscoli matematici sopra il teorema della composizione delle forze, e sopra il calcolo integrale delle differenze finite*. Pavia, 1789. — On trouve à la page 45 de cet ouvrage la solution du problème de la tour au jeu des échecs.

Von Claussberg. — *Demonstrative Rechenkunst*. Leipzig, 1795.



XIXᵉ SIÈCLE.

GIACOMETTI. — *Il nuovo giuocho di Scacchi, ossia il giuocho della guerra.* Geneva, 1801.

LORENZ. — *Lehrbegriff der Syntaktik und Kombinationslehre.* Magdeburg, 1806.

BRUNACCI. — *Compendio di calcolo sublime.* Milan, 1811. — Dans le t. I, p. 74, l'auteur traite le problème de la tour au jeu des échecs.

MOLLWEIDE. — *De quadratis magicis commentatio.* Lipsiæ, 1816.

G. GICCOLINI. — *Il tentativo di un nuovo giuocho di Scacchi.* Roma, 1820. Cet ouvrage contient deux circuits du cavalier sur l'échiquier de 100 cases.

WARNSDORF. — *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung,* 1823.

JACKSON. — *Rational amusements for winter evenings.* London, 1824.

PRATT. — *Studies of Chess.* London, 1825.

HINDENBURG. — *Ueber Gitter und Gitterschrift* (*Journal de Crelle,* t. II, p. 87). Berlin.

LEGENDRE. — *Théorie des nombres.* 3ᵉ édition. Paris. — On trouve, t. II, p. 187, quelques recherches sur le saut du cavalier.

MUSER. — *Récréations arithmétiques.* Munster, 1831.

T. CICCOLINI. — *Del cavallo degli Scacchi.* Paris, 1836.

HOHNDELL. — *Praktische Anleitung zur Bildung und Berechnung magischer oder sogenannter Zauberquadrate.* Leipzig, 1837.

VIOLLE. — *Traité complet des carrés magiques.* 2 vol. in-8 avec atlas contenant 400 figures. Paris et Dijon, 1838.

ZUCKERMANDEL. — *Regeln, nach denen alle Zauberquadrate, mit gleichen Liniensummen, leicht und schnell, auf eine spielende Art, gebildet werden können.* Nürnberg, 1838.

DE LAVERNÈDE. — *Problème de situation,* dans les Mémoires de l'Académie du Gard (1839).

DU HAYS. — *Sur le jeu de loto* (*Journal de Liouville,* t. VII, p. 192). Paris, 1842.

LIBRI. — *Sur l'emploi, dans l'analyse, des fonctions discontinues, pour la recherche des formules générales* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*). Paris, 1842.

TOMLINSON. — *Amusements in Chess.* Londres, 1845.

LISTING. — *Vorstudien zur Topologie* (*Abgedrückt aus den Göttinger Studien*). Göttingue, 1848.

REISS. — *Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels* (*Journal de Crelle,* t. LIV). Berlin.



CATTOIS. — *Calendrier mental grégorien, ou les Curiosités mathématiques, utiles, instructives et amusantes.* Orléans, 1852.

MINDING. — *Sur la course du cavalier* (*Journal de Crelle*, t. XLIV, 1852).

LAMARLE. — *Solution d'un coup singulier du jeu de dames* (*Mém. de l'Acad. des Sc.*, t. XXVII). Bruxelles, 1852.

SLYVONS. — *Application de l'Analyse aux sauts du cavalier du jeu des échecs;* Bruxelles, 1856.

HAMILTON. — *Memorandum respecting a new system of roots of unity* (*Philosophical Magazine*). London, 1856.

LANGE. — *Handbuch des Schachspiels.* Halle, 1856.

HÜGEL. — *Die magischen Quadrate mathematisch behandelt und bewiesen.* Ansbach, 1859.

LISTING. — *Der Census raümlichen Complexe* (*Göttinger Abhandlungen*, 1861).

C. DE POLIGNAC. — *Sur la course du cavalier au jeu des échecs* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. LII, p. 840). Paris, 1861.

JAENISCH. — *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs.* Saint-Pétersbourg, 1862.

CRETAINE. — *Études sur le problème de la marche du cavalier au jeu des échecs et solution du problème des huit dames.* Paris, 1865.

PLATEAU. — *Sur une récréation arithmétique* (*Bulletin de l'Acad. de Belgique*, t. XVI, p. 62. Bruxelles, 1863, et t. XXXVIII. Bruxelles, 1874).

ED. LUCAS. — *Application de l'Arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers.* Paris, 1867.

MOON. — *On the Knights move at Chess* (*Cambridge and Dublin math. Journ.*, 1re série, t. III, p. 333).

FROST. — *General solution and extension of the problem of the 15 schools girls* (*The Quarterly Journal*, t. VI, VII, VIII et IX). London, 1867-1870).

THOMPSON. — *On magic Squares* (*The Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, t. X, p. 186. London, 1869; t. XI, p. 57, 123, 213).

HORNER. — *On the algebra of magic squares.* (*The Quarterly Journal*, t. XI, p. 57 et 123; t. XII, p. 213) London, 1870.

REISS. — *Évaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu de dominos sont susceptibles d'après la règle de ce jeu* (*Annali di matematica*, t. V, p. 63). Milano, 1871.

VOLPICELLI. — *Soluzione completa e generale mediante la geometria di situazione del problema relativo alle corse del cavallo sopra qualunque scacchiere.* Roma, 1872.,

L. GROS. — *Théorie du baguenodier*, par un clerc de notaire lyonnais. Lyon, 1872.

Exner. — *Der Rosselsprung als Zauberquadrat.* Hirschberg, 1872.

Drach. — *An easy general rule for filding up all magic squares* (*The Messenger of mathematics*, t. II). Cambridge, 1873.

Von Pessl. — *Ueber eine besondere Art magischer Quadrate.* Amberg, 1873.

Broch. — *Sur la représentation graphique des nombres complexes* (Assoc. franç. pour l'Avanc. des Sc.; Congrès de Lille, 1874).

Günther. — *Zur mathematischen Theorie des Schachbretts* (*Archiv der Math. und Physik*, t. LVI). Leipzig, 1874.

Glaisher. — *On the problem of the eight queens* (*Philosophical Magazine*). London, 1874.

Günther. — *Beweis eines fundamental Satzes von den magischen Quadraten* (*Archiv der Mathematik und Phys.*, t. LVII, p. 285). Leipzig, 1875.

Frost. — *Two simple methods of tracing the Knight's path* (*The Quart Journ.*). London, 1876 et 1877.

P. Simons. — *Le jeu des mages, nouveau jeu breveté.* Lierre, 1876 et 1878.

Ed. Lucas. — *Sur un problème d'Euler relatif aux carrés magiques* (*Nouv. Corr. Math.*, t. II, p. 97). Bruxelles, 1876.

Günther. — *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.* Leipzig, 1876. — Cet ouvrage très important contient deux monographies, l'une sur les Polygones et les Polyèdres étoilés, et l'autre sur les Carrés magiques.

Mansion. — *Sur les carrés magiques* (*Nouv. Corr. math.*, t. II, p. 161 et 193). Bruxelles, 1876.

Flye-Sainte-Marie. — *Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. V, p. 144). Paris, 1876.

Ed. Lucas. — *Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester* (Assoc. franç. pour l'Avanc. des Sc.; Congrès du Havre, p. 213), 1877.

Ed. Lucas. — *Théorème sur la Géométrie des Quinconces* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. VI, p. 9). Paris, 1877.

Laisant. — *Note sur la Géométrie des Quinconces* (*Bulletin de la Soc, math.*, t. VI, p. 156). Paris, 1877.

C. de Polignac. — *Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée du premier degré* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. VI, p. 158). Paris, 1877.

Ruchonnet. — *Théorie du solitaire*, par feu le docteur Reiss, librement traduit de l'allemand (*Nouv. Corr. math.*, t. III, p. 231). Bruxelles, 1877.

Ed. Lucas. — *Problèmes sur la Géométrie des Quinconces dans le plan et dans l'espace* (*Nouv. Corr. math.*, t. III, p. 412). Bruxelles, 1877.

Busschop. — *Recherches sur le jeu du solitaire.* Bruges, 1879.

Hermary. — *Sur le jeu du solitaire* (Association française pour l'Avancement des sciences; Congrès de Montpellier, 1879).

Fleury. — *La clé du taquin, ou la solution des quinze.* Marseille, 1880.

W. Johnson. — *Note on the 15" Puzzle* (Journal de Sylvester). Baltimore, 1879.

W. E. Story. — *Notes on the 15" Puzzle* (Journal de Sylvester). Baltimore, 1879.

Ed. Lucas. — *Principii fondamentali della geometria dei Tessuti* (*L'ingegneria civile e le Arti industriali*, t. VI). Torino, 1880.

D. André. — *Sur un problème d'Analyse combinatoire* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. V). Paris, 1877. — *Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données.* (*Id.*, t. VII). — Cet intéressant Mémoire contient des problèmes sur l'alphabet, sur la musique, sur les marches du pion au jeu de dames et sur les sauts du cavalier aux échecs.

De Mondésir. — *Le dernier mot du taquin* (*La Nature* du 25 septembre 1880).

C. de Polignac. — *Sur la théorie des ramifications* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. VIII). Paris, 1880. — *Note sur la marche du cavalier* (*Id.*, t. IX).

E. Lemoine. — *Quelques questions de Géométrie de position sur les figures qui peuvent se tracer d'un seul trait.* Congrès d'Alger, 1881.

Laisant. — *Régions d'un plan et de l'espace* (Congrès d'Alger, 1881). — *Remarques sur la théorie des régions et des aspects* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. X). Paris, 1882.

Perrin. — *Sur le problème des aspects* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. X). Paris, 1882.

Paul de Hijo. — *Le problème du cavalier des échecs, d'après les méthodes qui donnent la symétrie par rapport au centre.* Ouvrage contenant plus de 413000 parcours du cavalier. Metz, 1882.

Perott. — *Sur le problème des fous* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. XI). Paris, 1883.

Ed. Lucas. — *Sur l'Arithmétique figurative et les permutations.* — *Calendrier perpétuel julien et grégorien.* Congrès de Rouen, 1883.

Tait. — *Note on a Theorem in Geometry of Position.* Édimbourg, 1883.

Ed. Lucas. — *Le problème géographique des quatre couleurs* (*Revue scientifique*). Paris, 1883.

Mantel. — *Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan.* Congrès de Rouen, 1883.

G[al] Parmentier. — *Le problème des n reines.* Congrès de Rouen, 1883.

Tait. — *Listing's Topologie* (*Philos. Magaz.*), 1884.

PALAMÈDE (Vte DU LIGONDÈS). — *Polygraphie du cavalier appliquée à la recherche des carrés magiques.* Orléans, 1884.

ED. LUCAS. — *Le calcul et les machines à calculer.* Conférence au Congrès de Blois, 1884.

SCHOUTE. — *Sur les carrés magiques à enceintes.* Congrès de Grenoble, 1885.

Gal FROLOW. — *Le problème d'Euler. — Les carrés magiques, nouvelle étude,* avec des notes par MM. Delannoy et Ed. Lucas. Paris, Gauthier-Villars, 1884-1886.

ED. LUCAS. — *Calendrier perpétuel à roulette. — Appareils à calculs exacts et instantanés.* Quatre boîtes de réglettes multiplicatrices, multisectrices, financières, népériennes. Paris, Belin; 1885.

FLEURY. — *Deux problèmes de Géométrie de situation* (*Journal de Math. élém.*) Paris, 1885.

DORMOY. — *Théorie mathématique des jeux de Bourse. — Théorie mathématique de l'écarté.* Congrès de Nancy, 1886.

G. TARRY. — *Géométrie de situation et le problème des dominos.* Congrès de Nancy, 1886.

V. COCCOZ. — *Carrés magiques impairs à enceintes successives.* Congrès de Nancy, 1886.

Gal FROLOW. — *Nouvelles recherches sur les carrés magiques.* Congrès de Nancy, 1886.

H. DELANNOY. — *Emploi de l'échiquier pour la solution des problèmes arithmétiques.* Congrès de Nancy, Paris et Limoges.

ED. LUCAS. — *Les carrés magiques de Fermat.* (*Journ. de Math. élém.,*) Paris, 1887.

ED. LUCAS. — *L'Arithmétique en boules. — L'Arithmétique en bâtons. — Le Jeu militaire. — Amusements par les jetons. — Le problème des reines.* (articles publiés dans les n°s 696, 697, 701, 731, 734 du journal *La Nature*). Paris, 1888.

ED. LUCAS. — *Jeux scientifiques pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique du calcul et du dessin.* Première série :

1° **La Fasioulette;**

2° **La Pipopipette;**

3° **La Tour d'Hanoï;**

4° **L'Icosagonal ou le Jeu des vingt forts;**

5° **L'Arithmétique diabolique ou le Calcul infernal;**

6° **Les Pavés florentins du père Sébastien.**

Six brochures in-8°, avec planches. Paris, 1889.

ED. LUCAS. — *Les appareils de calcul et les jeux de combinaisons* (*Revue scientifique*). Paris, 1890.

R. P. LE COINTE. — *Le Jeu des Réseaux.* Deux mémoires extraits du *Cosmos.* Paris, 1890.

H. Tarry. — *Le problème des reines.* Congrès de Limoges, 1890.

Ed. Lucas. — *Chinoiserie arithmétique.* — *Un carré magique de* 54 *siècles* (n° 874 du journal *La Nature*). Paris, 1890.

Ed. Lucas. — *Conférences sur le Diagrammomètre du colonel Kozloff, faites au Conservatoire national des Arts et Métiers.* Paris, 1890. — Voir aussi le n° 896 du journal *La Nature.*

FIN.





TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu des labyrinthes.*

QUATRIÈME RÉCRÉATION. — *Le problème des huit reines au jeu des échecs.*

CINQUIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu du solitaire.*

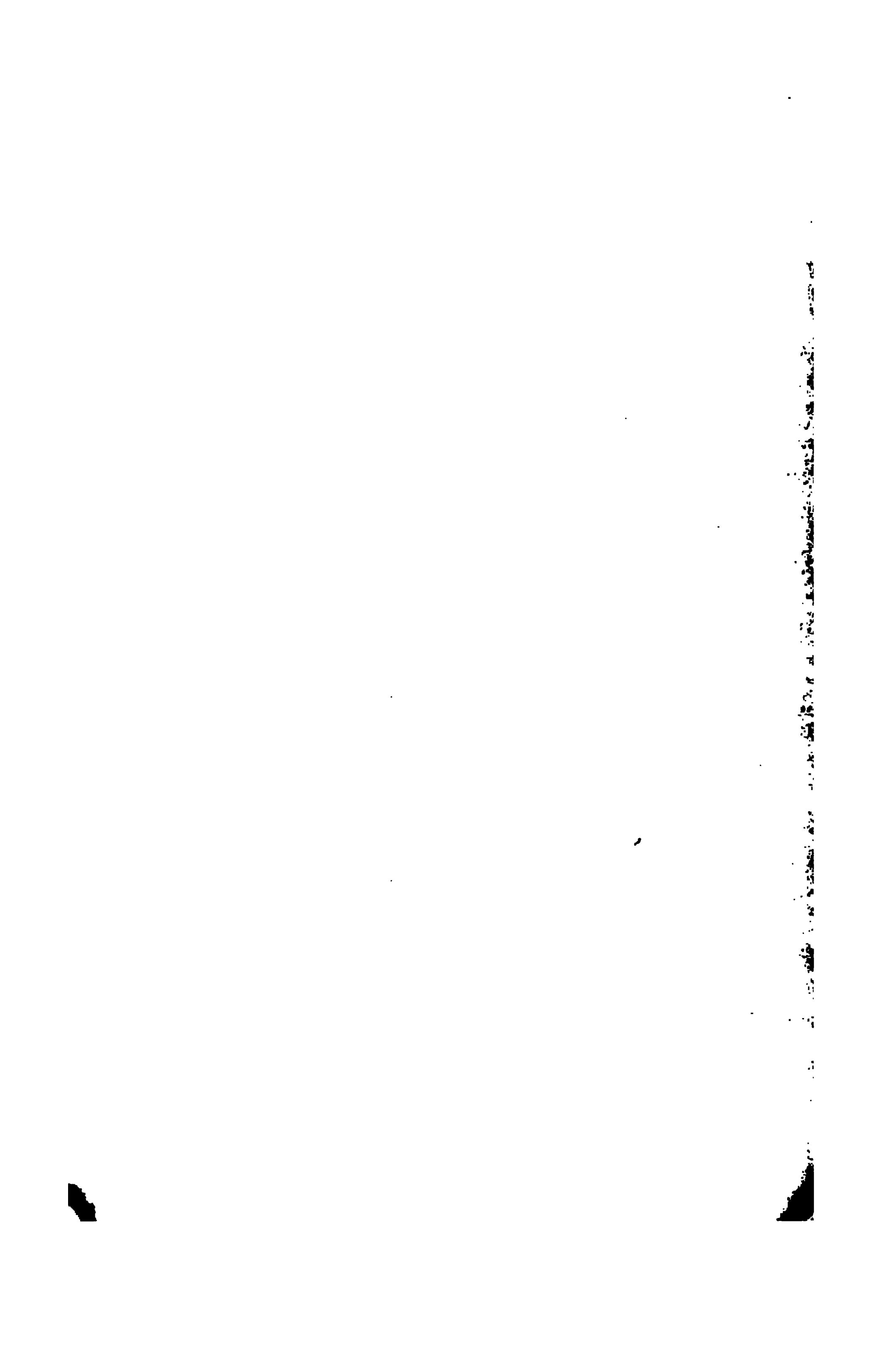
Sixième Récréation. — *La Numération binaire.*

SEPTIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu du baguenaudier.*

HUITIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu du taquin.*

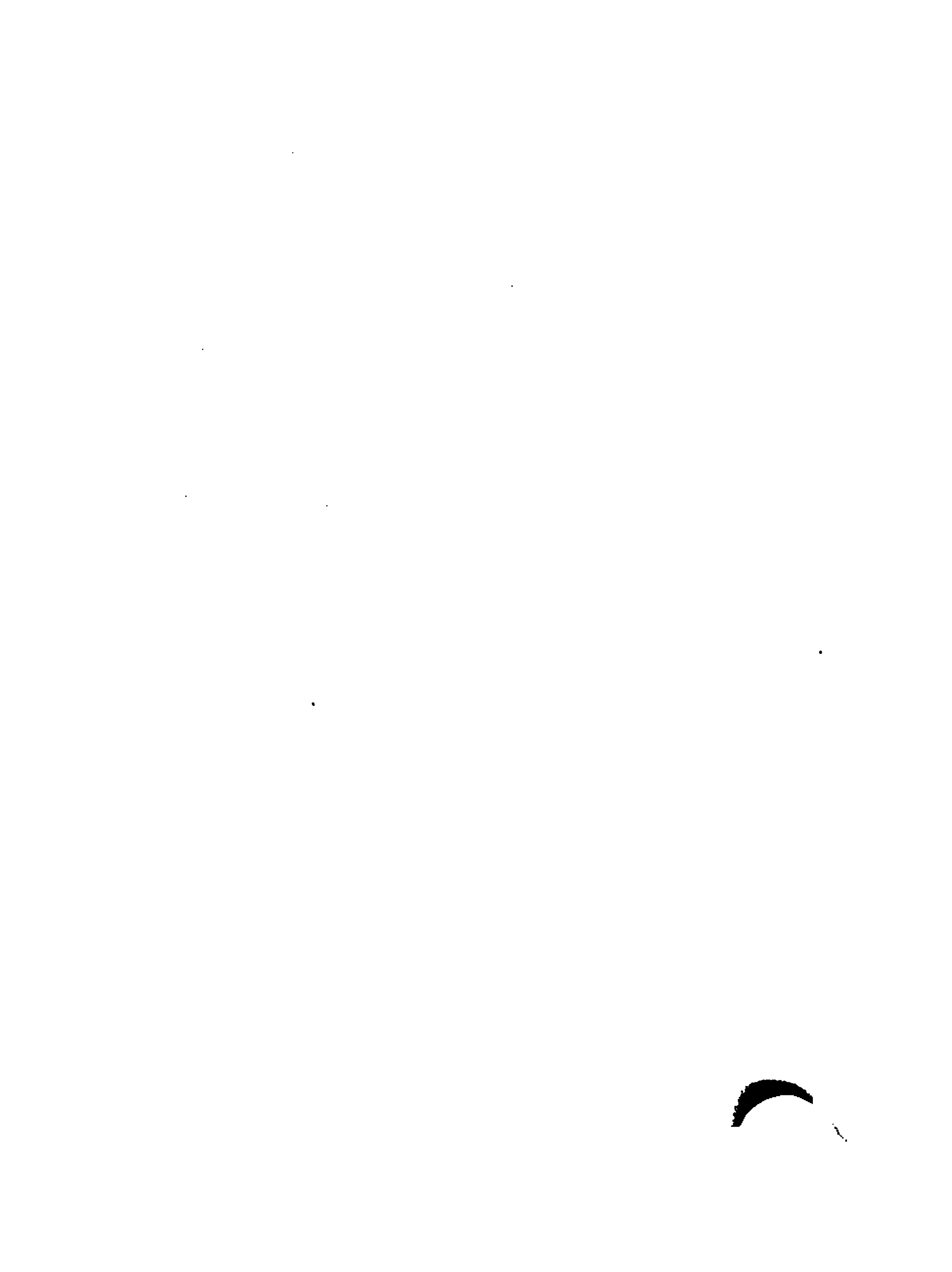


Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.

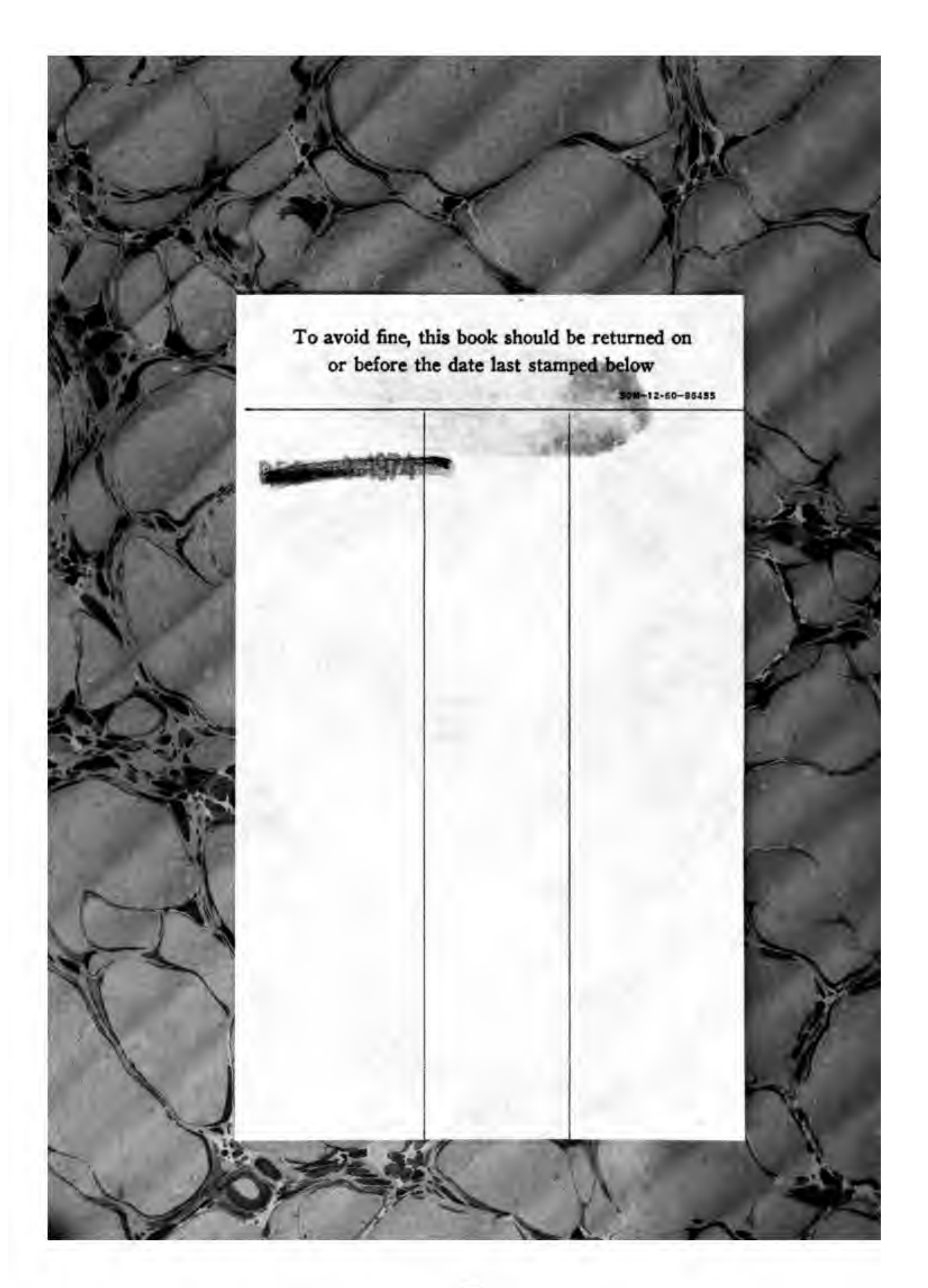


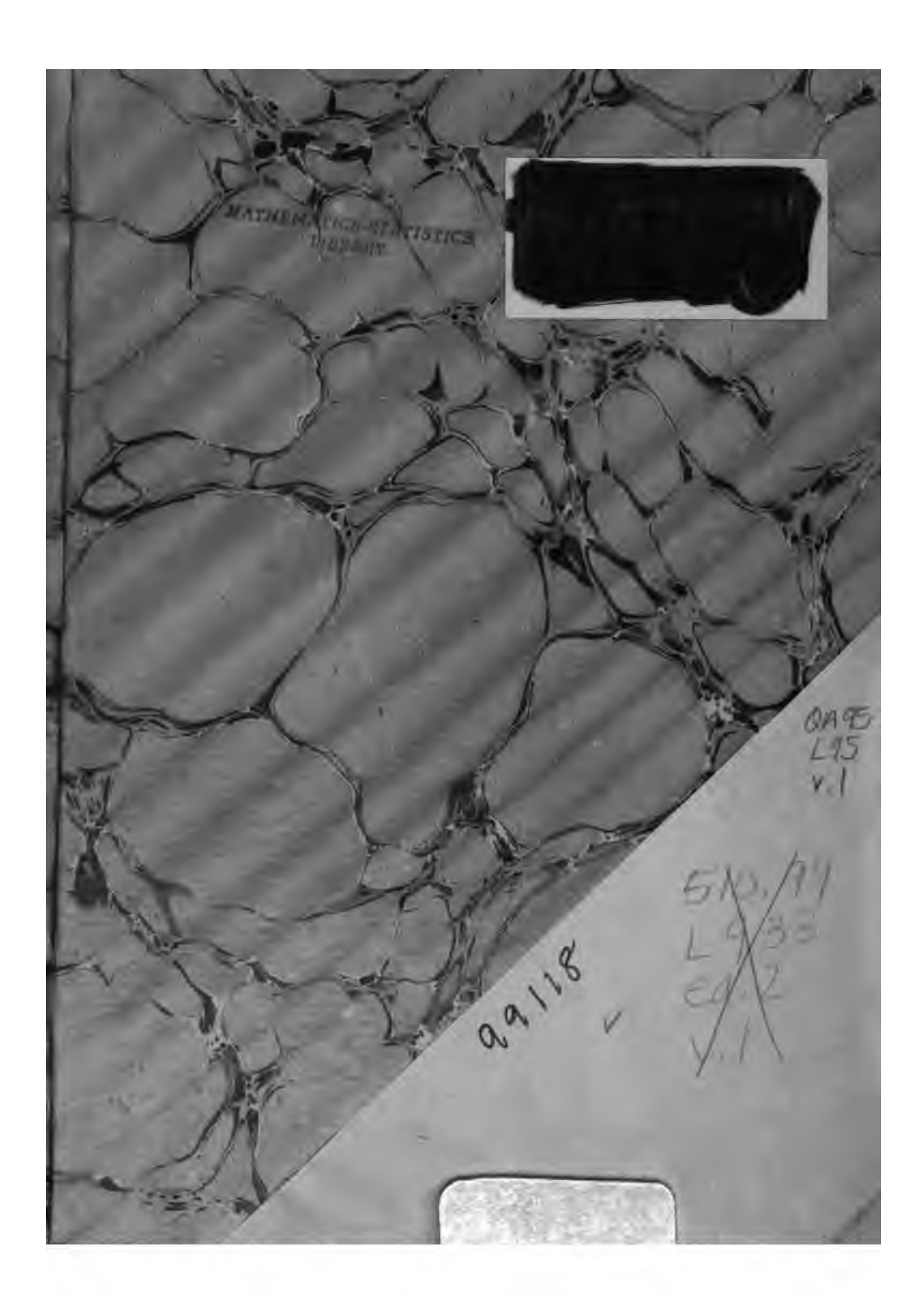











MATHEMATICS-STATISTICS
LIBRARY
QA95
L95
v.1
99118

